Ayudantia 1

Pablo Marchant Campos

Lunes 7 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Variables separables

Una ecuación diferencial:

$$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{1}$$

Se llama separable si es que al multiplicarla por un factor apropiado $h(x,y)$ se obtiene una ecuación diferencial de la forma:

$$m(x)\,\mathrm{d}\,x + n(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{2}$$

Que se resuelve integrando ambos términos directamente:

$$\int m(x)\,\mathrm{d}\,x + \int n(y)\,\mathrm{d}\,y = C \tag{3}$$

Donde C es una constante de integración arbitraria.

Además, los puntos (x_0, y) o (x, y_0) (con x_0 e y_0 constantes) para los cuales $h(x,y)$ se indefine pueden implicar soluciones particulares a (1) no contenidas en la solución (3) de la forma:

$$x(y) = x_0 = cte \tag{4}$$
$$y(x) = y_0 = cte \tag{5}$$

La solución completa al problema debe incluir entonces las funciones de este tipo que efectivamente satisfacen (1).

1.2. Ecuaciones Homogeneas

Una ecuación diferencial:

$$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{6}$$

Se llama homogenea si es que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones homogeneas de igual órden k. Es decir, la ecuación puede reescribirse como:

$$x^k m(y/x)\,\mathrm{d}\,x + x^k n(y/x)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{7}$$

Dividiendo ambos lados por x^k (lo cual hace que la ecuación se indefina para $x = 0$, y se debe verificar si $x(y) = 0$ constituye una solución particular al problema) se obtiene:

$$m(y/x)\,\mathrm{d}\,x + n(y/x)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{8}$$

Realizando el cambio de variable $y = ux$ (lo cual implica $\mathrm{d}\,y = x\,\mathrm{d}\,u + u\,\mathrm{d}\,x$) se obtiene:

$$m(u)\,\mathrm{d}\,x + n(u)\,[x\,\mathrm{d}\,u + u\,\mathrm{d}\,x] = 0 \tag{9}$$
$$[m(u) + un(u)]\,\mathrm{d}\,x + xn(u)\,\mathrm{d}\,u = 0 \tag{10}$$

Que es una ecuación diferencial separable en las variables x, u, y puede ser resuelta por el método de la sección anterior. La solución a (6) se obtiene entonces de la solución de (10) con la sustitución $u = y/x$. Sin embargo, se debe verificar que las soluciones particulares de (10) satisfagan efectivamente la ecuación diferencial original (6).

1.3. Ecuaciones Exactas

Una ecuación diferencial:

$$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{11}$$

Se llama exacta si es que existe $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(x,y) \tag{12}$$

Lo cual implica que la solución de (11) estaría dada por:

$$F(x,y) = C \tag{13}$$

Donde C es una constante de integración que se determina con las condiciones iniciales del problema.

De existir F, entonces se debe cumplir que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \tag{14}$$

De modo que para verificar si una ecuación diferencial de la forma (11) es exacta, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{15}$$

De ser asi, se puede proceder de la siguiente manera para determinar F (y por ende, la solución al problema).

Se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y) \tag{16}$$

$$F = \int f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + h(y) \tag{17}$$

Para determinar $h(y)$ derivo parcialmente con respecto a y e igualo a $g(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = g(x,y) \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = g(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \tag{19}$$

De donde h se resuelve integrando por y.[1]. Con esto se tiene la función F y la solución al problema dada por (13).

Es importante notar que para realizar el procedimiento anterior, es posible partir de $\partial F/\partial y$ en ves de $\partial F/\partial x$ en (16) y proceder de forma similar para obtener F.

1.4. Factores de Integración

Toda ecuación diferencial de la forma:

$$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{20}$$

Se puede transformar en una ecuación diferencial exacta multiplicandola por una función apropiada $u(x,y)$ llamada *factor intregrante*. Multiplicando por este factor se obtiene:

$$f(x,y)u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)u(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{21}$$

Si esta ecuación diferencial es exacta, entonces se debe cumplir que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)u(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)u(x,y)\right) \tag{22}$$

Esto es una ecuación diferencial parcial para $u(x,y)$ para la cual no existe un método estandar de solución. Sin embargo, para ciertos casos particulares se puede obtener una ecuación diferencial ordinaria para $u(x,y)$. Considero aqui dos casos:

- $u(x,y) = u(x)$: Si u es solo función de x, (22) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)u(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)u(x)\right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}u = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}u + g(x,y)\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} \tag{24}$$

$$\frac{1}{g(x,y)}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right]u = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} \tag{25}$$

  Esta es una ecuación diferencial separable para $u(x)$. Es imporante notar que esta ecuación no tiene sentido a menos que el factor de u en el lado izquierdo sea función solo de x (de no ser asi, la solución final para u sería función de x, y y no se cumpliría la suposición inicial). Es decir, debe existir una función de x, $H(x)$, tal que:

$$H(x) = \frac{1}{g(x,y)}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right] \tag{26}$$

  De cumplirse esto, puedo resolver la ecuación separable:

$$H(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,u}{u} \tag{27}$$

$$\int H(x)\,\mathrm{d}\,x = \ln(u) \tag{28}$$

$$\boxed{u = e^{H(x)\,\mathrm{d}\,x}} \tag{29}$$

- $u(x,y) = u(y)$: De manera similar, si u es solo función de y, (22) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)u(y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)u(y)\right) \tag{30}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}u + f(x,y)\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}u \tag{31}$$

$$\frac{1}{f(x,y)}\left[\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]u = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y} \tag{32}$$

  Esta es una ecuación diferencial separable para $u(y)$, y al igual que antes, no tiene sentido a menos que el factor de u en el lado izquierdo sea función solo de

[1] Notar que para que (19) tenga sentido, el lado derecho de la expresión debe ser solo función de y (esto, debido a que h es función solo de y). Si al resolver un ejercicio, al llegar a (19) esto no se cumple, entonces puede significar que la ecuación no es exacta, o que se realizo un error de cálculo

y. Entonces, debe existir una función de y, $H(y)$, tal que:[2]

$$H(y) = \frac{1}{f(x,y)}\left[\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] \tag{33}$$

De cumplirse esto, puedo resolver la ecuación separable:

$$H(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{\mathrm{d}\,u}{u} \tag{34}$$

$$\int H(y)\,\mathrm{d}\,y = \ln(u) \tag{35}$$

$$\boxed{u = e^{H(y)\,\mathrm{d}\,y}} \tag{36}$$

En ambos casos, omití posibles constantes de integración ya que simplemente se requiere cualquier función que cumpla la condición (22).

Una ves se obtiene un factor integrante $u(x,y)$, se puede resolver (21) mediante el método descrito en 1.3.

1.5. Ecuaciones Lineales (de primer orden)

Una ecuación diferencial de la forma:

$$h(x)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + g(x)y = f(x) \tag{37}$$

Es llamada ecuación diferencial de primer órden. Para solucionarla parto dividiendola por $h(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + \frac{g(x)}{h(x)}y = \frac{f(x)}{h(x)} \tag{38}$$

Que por comodidad reescribo como:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + P(x)y = Q(x) \tag{39}$$

Multiplicando ambos lados por $exp(\int P(x)\,\mathrm{d}\,x)$ obtengo:

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}P(x)y = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x} \tag{40}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}y\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x} \tag{41}$$

Lo cual se resuelve inmediatamente por integración:

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}y = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x + C \tag{42}$$

$$\boxed{y = \frac{\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x + C}{e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}}} \tag{43}$$

Donde C es una constante de integración arbitraria.

1.6. Ecuacion de Bernoulli

La ecuación diferencial de Bernoulli es:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{44}$$

Para el caso particular $n = 1$, la ecuación es separable. Para $n \neq 1$, la ecuación se puede reducir a una ecuación lineal de primer orden. Para ello, multiplico la ecuación por $(1-n)y^{-n}$:

$$(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + (1-n)y^{1-n}P(x) = (1-n)Q(x) \tag{45}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(y^{1-n})}{\mathrm{d}\,x} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x) \tag{46}$$

Realizando la sustitución $u = y^{1-n}$, obtengo una ecuación diferencial lineal para u:

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x) \tag{47}$$

Que se puede resolver para u mediante el método descrito en 1.5, y se obtiene la solución en y como $y = u^{1/(1-n)}$

2. Problemas

2.1.

El movimiento unidimensional $x(t)$ de un cuerpo sujeto a una fuerza de roce proporcional a su velocidad y a una fuerza constante F_c satisface la ecuación diferencial:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -k\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + F_c$$

Mediante un cambio de variables apropiado, transforme esta ecuación en una ecuación de variables separables. Luego, resuelva la velocidad límite del cuerpo y obtenga la solución para $x(t)$ dadas la posición inicial x_0 y velocidad inicial v_0.

[2] Notar que la expresión para $H(y)$ resultante, se puede obtener de $H(x)$ en (26) alternando las derivadas parciales $\partial/\partial x \to \partial/\partial y$, $\partial/\partial y \to \partial/\partial x$ y las funciones $f(x,y) \to g(x,y)$, $g(x,y) \to f(x,y)$. Esto es de esperar debido a la simetría del problema

2.2.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $2xy\,\mathrm{d}\,x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,y = 0$
- $(x + y)\,\mathrm{d}\,x - (x - y)\,\mathrm{d}\,y = 0$

2.3.

Demuestre que la ecuación diferencial:

$$\frac{xy+1}{y}\,\mathrm{d}\,x + \frac{2y-x}{y^2}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

es exacta y resuelvala.

2.4.

Demuestre que la siguiente ecuación diferencial no es exacta:

$$(e^x - \sin(y))\,\mathrm{d}\,x + \cos(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{48}$$

Y luego resuelvala sabiendo que tiene un factor integrante que es solo función de x.

2.5.

Obtenga la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y' + y\cos(x) = \sin(2x)/2, \quad y(0) = 1$
- $(x - \sin(y))\,\mathrm{d}\,y + \tan(y)\,\mathrm{d}\,x = 0, \quad y(1) = \pi/6$

2.6.

Considere la *ecuación diferencial de Ricatti*:

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2, f_2(x) \neq 0$$

Si $y_1(x)$ es una solución particular de esta ecuación, demuestre que la sustitución

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

transforma la ecuación de Ricatti en una ecuación lineal de primer orden. Utilize este resultado para resolver:

$$y' = 2\tan(x)\sec(x) - y^2\sin(x), \quad y_1(x) = \sec(x)$$

2.7.

Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $xy' - y(2xy\ln(x) - 1) = 0$
- $2\cos(x)y^2y' = y^3\sin(x) - 2\cos(x)y^5$

3. Soluciones

3.1.

Tengo la ecuación:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -k\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + F_c \tag{49}$$

Tomando $v = \mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,t$, obtengo una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = -kv + F_c \tag{50}$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = -k\left(v - \frac{F_c}{k}\right) \tag{51}$$

Si realizo ahora el cambio de variable:

$$u = v - \frac{F_c}{k}, \qquad \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \tag{52}$$

La ecuación diferencial (51) queda:

$$m\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = -ku \tag{53}$$

Que es una ecuación simple de variables separables. Resolviendola obtengo:

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{u} = -\frac{k}{m}\,\mathrm{d}\,t \tag{54}$$

$$\ln|u| = -\frac{k}{m}t + C \tag{55}$$

$$|u| = e^C e^{-kt/m} \tag{56}$$

$$u = \pm e^C e^{-kt/m} \tag{57}$$

$$u = Ae^{-kt/m} \tag{58}$$

Donde $A = \pm e^C$, es una constante que depende de las condiciones iniciales. Reemplazando u por (52) obtengo la solución para v:

$$v(t) = Ae^{-kt/m} + \frac{F_c}{k} \tag{59}$$

De lo cual se resuelve inmediatamente la velocidad límite del cuerpo:

$$\boxed{v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{F_c}{k}} \tag{60}$$

Utilizando la velocidad inicial v_0 puedo determinar el valor de la constante A en (59):

$$v(0) = v_0 = A + \frac{F_c}{k} \tag{61}$$

$$A = v_0 - \frac{F_c}{k} \tag{62}$$

Y la expresión para la velocidad queda:

$$\boxed{v(t) = \left(v_0 - \frac{F_c}{k}\right) e^{-kt/m} + \frac{F_c}{k}} \tag{63}$$

Integrando este resultado obtengo la posición del cuerpo:

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right) e^{-kt/m} + \frac{F_c}{k} t + B \tag{64}$$

Ocupando la posición inicial x_0 resuelvo B:

$$x(0) = x_0 = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right) + B \tag{65}$$

$$B = x_0 - \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right) \tag{66}$$

Y la posición como función del tiempo está dada entonces por:

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right)\left(e^{-kt/m} - 1\right) + \frac{F_c}{k} t + x_0} \tag{67}$$

3.2.

- La ecuación se puede reescribir como:

$$x^2\left(2\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\, x + x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \mathrm{d}\, y = 0 \tag{68}$$

De donde se ve que los coeficientes de $\mathrm{d}\, x$ y $\mathrm{d}\, y$ son funciones homogeneas de órden igual a 2. La sustitución $y = ux,\ \mathrm{d}\, y = u \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, u$ conduce entonces a una ecuación diferencial de variables separables:

$$2u \,\mathrm{d}\, x + (1+u^2)(u \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, u) = 0 \tag{69}$$

$$(3u + u^3) \,\mathrm{d}\, x + x(1+u^2) \,\mathrm{d}\, u = 0 \tag{70}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \frac{1+u^2}{3u+u^3} \,\mathrm{d}\, u = 0 \tag{71}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \int \frac{1+u^2}{3u+u^3} \,\mathrm{d}\, u = C \tag{72}$$

$$\ln x + \frac{1}{3}\ln(3u+u^3) = C \tag{73}$$

$$x^3(3u+u^3) = A \tag{74}$$

Reemplazando por $u = y/x$ se obtiene la familia de soluciones:

$$3x^2y + y^3 = A \tag{75}$$

- La ecuación se puede reescribir como:

$$x\left(1 + \frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\, x - x\left(1 - \frac{y}{x}\right) \mathrm{d}\, y = 0 \tag{76}$$

De donde se ve que los coeficientes de $\mathrm{d}\, x$ y $\mathrm{d}\, y$ son funciones homogeneas de órden igual a 1. La sustitución $y = ux,\ \mathrm{d}\, y = u \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, u$ conduce entonces a una ecuación diferencial de variables separables:

$$(1+u) \,\mathrm{d}\, x + (u-1)(u \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, u) = 0 \tag{77}$$

$$(1+u^2) \,\mathrm{d}\, x + x(u-1) \,\mathrm{d}\, u = 0 \tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \frac{u-1}{u+1} \,\mathrm{d}\, u = 0 \tag{79}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \int \frac{u-1}{u^2+1} \,\mathrm{d}\, u = C \tag{80}$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan u = C \tag{81}$$

Reemplazando por $u = y/x$ se obtiene la familia de soluciones:

$$\ln x + \ln\left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}\right) - \arctan(y/x) = C \tag{82}$$

$$\ln\left(\sqrt{y^2 + x^2}\right) - \arctan(y/x) = C \tag{83}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(y^2 + x^2\right) - \arctan(y/x) = C \tag{84}$$

3.3.

La condición para que la ecuación sea exacta es:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{xy+1}{y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2y-x}{y^2}\right] \tag{85}$$

$$-\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y^2} \tag{86}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es exacta y existe $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy+1}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y-x}{y^2} \tag{87}$$

Utilizo la derivada parcial de F con respecto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy+1}{y} \tag{88}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + h(y) \tag{89}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} \tag{90}$$

Pero por (87) tengo que:

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = \frac{2y-x}{y^2} \tag{91}$$

De lo cual se resuelve facilmente $h(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,y} = \frac{2}{y} \tag{92}$$

$$h(y) = 2\ln(y) \tag{93}$$

De modo que:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) \tag{94}$$

Y la solución general a la ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) = C} \tag{95}$$

3.4.

De ser exacta la ecuación, se debiese cumplir que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x - \sin(y)) = \frac{\partial}{\partial x}\cos(y) \tag{96}$$

$$-\cos(y) = 0 \tag{97}$$

De lo cual se ve que no se cumple la condición, y por lo tanto, la ecuación no es exacta. Para encontrar un factor integrante utilizo (26):

$$H(x) = \frac{1}{\cos(y)}\left[-\cos(y)\right] = -1 \tag{98}$$

Por lo cual, usando (29) obtengo el factor integrante:

$$u(x) = e^{\int -\,\mathrm{d}\,x} = e^{-x} \tag{99}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante obtengo la siguiente ecuación diferencial exacta:

$$(1 - \sin(y)e^{-x})\,\mathrm{d}\,x + \cos(y)e^{-x}\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{100}$$

Procedo a resolverla. Para ello, busco $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1 - \sin(y)e^{-x}), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y)e^{-x} \tag{101}$$

Ocupo la ecuación con la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y)e^{-x} \tag{102}$$

$$F(x,y) = \sin(y)e^{-x} + h(x) \tag{103}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(y)e^{-x} + \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,x} \tag{104}$$

Pero utilizando (101) tengo que:

$$-\sin(y)e^{-x} + \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,x} = 1 - \sin(y)e^{-x} \tag{105}$$

De lo cual resulta trivial resolver $h(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,x} = 1 \tag{106}$$

$$h(x) = x \tag{107}$$

De modo que $F(x,y)$ es:

$$F(x,y) = \sin(y)e^{-x} + x \tag{108}$$

Y la solución a la ecuación diferencial queda:

$$\boxed{\sin(y)e^{-x} + x = C} \tag{109}$$

3.5.

- Tengo la ecuación diferencial lineal:

$$y' + y\cos(x) = \sin(2x)/2 \tag{110}$$

Multiplico por el factor $e^{\int \cos(x)\,\mathrm{d}\,x} = e^{\sin(x)}$:

$$e^{\sin(x)}y' + e^{\sin(x)}\cos(x)y = e^{\sin(x)}\sin(2x)/2 \tag{111}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[e^{\sin(x)}y\right] = e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x) \tag{112}$$

$$e^{\sin(x)}y = \int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{113}$$

$$e^{\sin(x)}y = \int e^{\sin(x)}\sin(x)\,\mathrm{d}\,(\sin(x)) \tag{114}$$

La integral se resuelve facilmente usando integración por partes, con lo cual se obtiene:

$$e^{\sin(x)}y = (\sin(x) - 1)e^{\sin(x)} + C \tag{115}$$
$$y = (\sin(x) - 1) + Ce^{-\sin(x)} \tag{116}$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = 1$, resuelvo la constante C:

$$1 = -1 + C \tag{117}$$
$$C = 2 \tag{118}$$

Por lo cual la solución particular queda:

$$\boxed{y = (\sin(x) - 1) + 2e^{-\sin(x)}} \tag{119}$$

- Para resolver esta ecuación, considero x como la variable dependiente. La ecuación diferencial es equivalente a:

$$x - \sin(y) + \tan(y)\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = 0 \tag{120}$$

Divido por $\tan(y)$ (en el caso $tan(y) = 0 \to y = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, tengo $\mathrm{d}\,y = 0$ y se verifica facilmente que $y = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ es una solución particular de la ecuación diferencial original):

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} + \frac{1}{\tan(y)}x = \cos(y) \tag{121}$$

Que es una ecuación diferencial lineal para x. Multiplico por el factor $e^{\int \mathrm{d}\,y/\tan(y)} = \sin(y)$:

$$\sin(y)\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} + \cos(y)x = \sin(y)\cos(y) \tag{122}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[\sin(y)x] = \frac{1}{2}\sin(2y) \tag{123}$$
$$\sin(y)x = -\frac{1}{4}\cos(2y) + C \tag{124}$$
$$x = -\frac{\cos(2y)}{4\sin(y)} + \frac{C}{\sin(y)} \tag{125}$$

Utilizando la condición inicial $y(1) = \pi/6$ resuelvo C:

$$1 = -\frac{1}{4} + 2C \tag{126}$$
$$C = \frac{5}{8} \tag{127}$$

Y la solución particular queda:

$$\boxed{x = -\frac{\cos(2y)}{4\sin(y)} + \frac{5}{8\sin(y)}} \tag{128}$$

3.6.

Tengo:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}, \quad y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u' \tag{129}$$

Reemplazando en la ecuación de Ricatti obtengo:

$$y_1' - \frac{1}{u^2}u' = f_0(x) + f_1(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right] + f_2(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right]^2 \tag{130}$$
$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{u^2}u' = f_0(x) + f_1(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right] \\ + f_2(x)\left[y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right] \end{aligned} \tag{131}$$
$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{u^2}u' = f_0(x) + f_1(x)y_1 + \frac{f_1}{u} \\ + f_2(x)y_1^2 + \frac{2y_1f_2(x)}{u} + \frac{f_2(x)}{u^2} \end{aligned} \tag{132}$$

Reordeno terminos obteniendo:

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{u^2}u' = [f_0(x) + f_1(x)y_1 + f_2(x)y_1^2] \\ + \frac{f_1 + 2y_1f_2(x)}{u} + \frac{f_2(x)}{u^2} \end{aligned} \tag{133}$$

Pero como y_1 es solución de la ecuación diferencial de Riccati, cumple que:

$$y_1' = f_0(x) \quad + f_1(x)y_1 + f_2(x)y_1^2 \tag{134}$$

Por lo cual (133) se puede reescribir como:

$$-\frac{1}{u^2}u' = \frac{f_1 + 2y_1f_2(x)}{u} + \frac{f_2(x)}{u^2} \tag{135}$$

Multiplico por $-u^2$:

$$u' = -(f_1 + 2y_1f_2(x))u + -f_2(x) \tag{136}$$
$$\boxed{u' + (f_1 + 2y_1f_2(x))u = -f_2(x)} \tag{137}$$

Que es una ecuación diferencial lineal para u.

Procedo ahora a resolver:

$$y' = 2\tan(x)\sec(x) - y^2\sin(x), \quad y_1(x) = \sec(x) \tag{138}$$

En este caso tengo:

$$f_0 = 2\tan(x)\sec(x), \quad f_1 = 0, \quad f_2 = -\sin(x) \tag{139}$$

Por lo tanto, (137) queda:

$$u' - 2\tan(x)u = \sin(x) \tag{140}$$

Multiplico por el factor $e^{\int -2\tan(x)\,\mathrm{d}\,x} = \cos^2(x)$:

$$\cos^2(x)u' - 2\sin(x)\cos(x)u = \cos^2(x)\sin(x) \tag{141}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left[\cos^2(x)u\right] = \cos^2(x)\sin(x) \tag{142}$$
$$\cos^2(x)u = \int \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{143}$$
$$\cos^2(x)u = -\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}\,(\cos(x)) \tag{144}$$
$$\cos^2(x)u = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C \tag{145}$$
$$u = -\frac{1}{3}\cos(x) + C\sec^2(x) \tag{146}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y = \sec(x) + \frac{1}{-\cos(x)/3 + C\sec^2(x)}} \tag{147}$$

3.7.

- Tengo:

$$xy' - y(2xy\ln(x) - 1) = 0 \tag{148}$$
$$y' + \frac{1}{x}y = 2\ln(x)y^2 \tag{149}$$

Esto es una ecuación de bernoulli con $n = 2$. Multiplico por $(1-n)y^{-n} = -y^{-2}$:

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -2\ln(x) \tag{150}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[y^{-1}\right] - \frac{1}{x}y^{-1} = -2\ln(x) \tag{151}$$

Tomo $u = y^{-1}$ con lo cual obtengo una ecuación diferencial lineal:

$$u' - \frac{1}{x}u = -2\ln(x) \tag{152}$$

Multiplico por $e^{-\int(1/x)\,\mathrm{d}\,x} = 1/x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\frac{1}{x}u\right] = -\frac{2\ln(x)}{x} \tag{153}$$
$$\frac{1}{x}u = -2\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x + C \tag{154}$$

La integral se resuelve facilmente mediante el cambio de variable $v = \ln(x)$, con lo cual se obtiene:

$$\frac{1}{x}u = -\ln^2(x) + C \tag{155}$$
$$u = -x\ln^2(x) + xC \tag{156}$$

Por lo cual la solución final a la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y = \frac{1}{-x\ln^2(x) + xC}} \tag{157}$$

- Divido la ecuación por y^2 (La ecuación resultante no es válida para $y = 0$, pero se ve facilmente que $y = 0$ constituye una solución particular a la ecuación original) con lo cual obtengo:

$$2\cos(x)y' = y\sin(x) - 2\cos(x)y^3 \tag{158}$$
$$y' - \frac{1}{2}\tan(x)y = -y^3 \tag{159}$$

Que es una ecuación de Bernoulli con $n = 3$. Multiplico por $(1-n)y^{-n} = -2y^{-3}$:

$$-2y^{-3}y' + \tan(x)y^{-2} = 2 \tag{160}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[y^{-2}\right] + \tan(x)y^{-2} = 2 \tag{161}$$

Realizo el cambio de variable $u = y^{-2}$ con lo cual obtengo una ecuación diferencial lineal para u:

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} + \tan(x)u = 2 \tag{162}$$

Multiplico por el factor $e^{\int \tan(x)\,\mathrm{d}\,x} = \sec(x)$:

$$\sec(x)\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} + \sec(x)\tan(x)u = 2\sec(x) \tag{163}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\sec(x)u\right] = 2\sec(x) \tag{164}$$

Integrando obtengo la solución:

$$\sec(x)u = 2\int \sec(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{165}$$
$$\sec(x)u = 2\int \left[\sec(x)\frac{(\tan(x)+\sec(x))}{(\tan(x)+\sec(x))}\right]\mathrm{d}\,x \tag{166}$$
$$\sec(x)u = 2\int \left[\frac{(\tan(x)\sec(x)+\sec^2(x))}{(\tan(x)+\sec(x))}\right]\mathrm{d}\,x \tag{167}$$
$$\sec(x)u = 2\int \frac{\mathrm{d}\,(\sec(x)+\tan(x))}{(\sec(x)+\tan(x))} \tag{168}$$
$$\sec(x)u = 2\ln(\sec(x)+\tan(x)) + C \tag{169}$$
$$u = 2\ln(\sec(x)+\tan(x))\cos(x) + C\cos(x) \tag{170}$$

Y la solución para y se obtiene como:

$$y = \left[2\ln(\sec(x)+\tan(x))\cos(x) + C\cos(x)\right]^{-1/2} \tag{171}$$

4. Mas Problemas

4.1.

El radio en un trozo de plomo se descompone a una razón proporcional a la cantidad presente. si un 10 % del radio se descompone en 200 años ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial estara presente en un trozo de plomo luego de 1000 años?

Solución: La cantidad x de radio contenida en el trozo de plomo como función del tiempo t esta gobernada por la ecuación diferencial:

$$x' = -kx \tag{172}$$

Donde k es una constante positiva. La solución se determina facilmente como:

$$x(t) = Ae^{-kt} \tag{173}$$

De esta expresión se observa que $x(0) = A$ corresponde a la cantidad inicial de radio. Luego de 200 años, la cantidad será $x(200) = Ae^{-200k}$. Dado que para este momento, un 10 % del radio se ha descompuesto, se tiene:

$$x(200) = 0{,}9 \cdot x(0) \tag{174}$$
$$Ae^{-200k} = 0{,}9 \cdot A \tag{175}$$
$$e^{-200k} = 0{,}9 \tag{176}$$
$$k = -\frac{\ln(0{,}9)}{200} \tag{177}$$
$$k = 0{,}0005268025785 \tag{178}$$

Ahora simplemente se evalua para $t = 1000$ con este valor de k

$$\boxed{x(1000) = Ae^{-1000k} \simeq 0{,}5905 \cdot A} \tag{179}$$

Lo cual representa un 59,05 % de la cantidad de radio inicial.

4.2.

Encuentre una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación diferencial:

$$x\cos(y)\ \mathrm{d}\,x + \sqrt{x+1}\sin(y)\ \mathrm{d}\,y = 0$$

Especifique ademas el dominio en el cual tanto la ecuación diferencial como su solución están definidas.

Solución: Primero se nota que la ecuación diferencial solo tiene sentido para $x \geq -1$. Además, si $x \neq -1, y \neq \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$, se puede dividir la expresión por $\sqrt{x+1}\cos y$, obteniendo:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{180}$$

Integrando se obtiene una solución de 1 parametro para la ecuación diferencial, valida bajo las condiciones especificadas anteriormente:

$$\boxed{\frac{2(x-2)}{3}\sqrt{x+1} - \ln|\cos y| = C} \tag{181}$$

Las funciones:

$$\boxed{y = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots} \tag{182}$$

Que fueron excluidas para obtener la solución de un parámetro, son soluciones particulares.

4.3.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogeneas:

1. $2xy\,\mathrm{d}\,x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,y = 0$
2. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x = 0$

Solución:

1. La ecuación se puede reescribir como:

$$x^2\left(2\frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}\,x + x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{183}$$

De donde se ve que los coeficientes de $\mathrm{d}\,x$ y $\mathrm{d}\,y$ son funciones homogeneas de órden igual a 2. La sustitución $y = ux$, $\mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u$ conduce entonces a una ecuación diferencial de variables separables:

$$2u\,\mathrm{d}\,x + (1+u^2)(u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u) = 0 \tag{184}$$
$$(3u + u^3)\,\mathrm{d}\,x + x(1+u^2)\,\mathrm{d}\,u = 0 \tag{185}$$
$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \frac{1+u^2}{3u+u^3}\,\mathrm{d}\,u = 0 \tag{186}$$
$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \int\frac{1+u^2}{3u+u^3}\,\mathrm{d}\,u = C \tag{187}$$
$$\ln x + \frac{1}{3}\ln(3u+u^3) = C \tag{188}$$
$$x^3(3u+u^3) = A \tag{189}$$

Reemplazando por $u = y/x$ se obtiene la familia de soluciones:

$$\boxed{3x^2y + y^3 = A} \tag{190}$$

Además, en (186) se dividió la ecuación por $x(3u + u^3)$, asi que se debe verificar si $x(y) = 0$ y $3u + u^3 = 0$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial. Por directa sustitución se ve que $x(y) = 0$ no es solución. Para $(3u + u^3) = 0$ se tiene:

$$3y/x + (y/x)^3 = 0 \tag{191}$$
$$3x^2y + y^3 = 0 \tag{192}$$

Que no es mas que un caso particular de la solución obtenida antes.

2. La ecuación se puede reescribir como:

$$x\left(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}\right) \mathrm{d}\,y - x\frac{y}{x}\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{193}$$

De donde se ve que los coeficientes de $\mathrm{d}\,x$ y $\mathrm{d}\,y$ son funciones homogeneas de órden igual a 1. La sustitución $y = ux$, $\mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u$ conduce entonces a una ecuación diferencial de variables separables:

$$(1 + \sqrt{u^2 - u})(u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u) - u\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{194}$$
$$(u\sqrt{u^2 - u})\,\mathrm{d}\,x + x(1 + \sqrt{u^2 - u})\,\mathrm{d}\,u = 0 \tag{195}$$
$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \left(\frac{1}{u\sqrt{u^2 - u}} + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}\,u = 0 \tag{196}$$
$$\ln(x) + \frac{2(u-1)}{\sqrt{u^2 - u}} + \ln(u) = C \tag{197}$$

Reemplazando $u = y/x$ obtengo la solución:

$$\boxed{\ln(x) + \frac{2(y/x - 1)}{\sqrt{(y/x)^2 - y/x}} + \ln(y/x) = C} \tag{198}$$

Ahora debo considerar las posibles soluciones particulares al problema. En (195) se dividió por $xu\sqrt{u^2 - u}$ asi que debo considerar las posibles soluciones particulares:

$$x = 0 \tag{199}$$
$$\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \tag{200}$$
$$(y/x)^2 - (y/x) = 0 \Rightarrow y = x \tag{201}$$

Por directa sustitución en la ecuación diferencial, se verifica que las dos últimas corresponden a soluciones de la misma, por lo tanto las soluciones particulares son:

$$\boxed{y = 0, \quad y = x} \tag{202}$$

4.4.

Demuestre que la ecuación diferencial

$$(4x^3 - \sin x + y^3)\,\mathrm{d}\,x - (y^2 + 1 - 3xy^2)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

es exacta, y encuentre una familia de soluciones de 1 parámetro.

Solución: Para verificar que la ecuación diferencial es exacta, se demuestra que la derivada con respecto a y del coeficiente de $\mathrm{d}\,x$ es igual a la derivada con respecto a x del coeficiente de $\mathrm{d}\,y$. Para el coeficiente de $\mathrm{d}\,x$ se tiene entonces:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}(4x^3 - \sin x + y^3) = 3y^2 \tag{203}$$

Para el coeficiente de $\mathrm{d}\,y$ resulta:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(y^2 + 1 - 3xy^2) = 3y^2 \tag{204}$$

Con lo cual se demuestra que la ecuación diferencial es exacta. Esto implica la existencia de una función $f(x, y)$ que satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - \sin x + y^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -(y^2 + 1 - 3xy^2) \end{aligned} \tag{205}$$

Integrando la primera expresión con respecto a x se obtiene;

$$f(x, y) = x^4 + \cos x + xy^3 + g(y) \tag{206}$$

Donde $g(y)$ es una función cualquiera de y. Ahora, derivando $f(x, y)$ parcialmente con respecto a y, se obtiene por (205) que:

$$3xy^2 + g'(y) = -y^2 - 1 + 3xy^2 \tag{207}$$
$$g'(y) = -y^2 - 1 \tag{208}$$

Integrando con respecto a y se determina $g(y)$

$$g(y) = -\frac{y^3}{3} - y \tag{209}$$

Con lo cual se obtiene:

$$f(x,y) = x^4 + \cos x + xy^3 - \frac{y^3}{3} - y \tag{210}$$

Sin embargo, la ecuación diferencial dice que $\mathrm{d}\, f(x,y) = 0$, por lo tanto, $f(x,y) = C$, y se tiene la solución:

$$\boxed{x^4 + \cos x + xy^3 - \frac{y^3}{3} - y = C} \tag{211}$$

4.5.

Demuestre que la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}(Ax^p y^{q+1} + Bx^r y^{s+1})\,\mathrm{d}\,x\\ +(Cx^{p+1}y^q + Dx^{r+1}y^s)\,\mathrm{d}\,y = 0\end{aligned} \tag{212}$$

Donde A, B, C, D, p, q, r, s son constantes no nulas, posee un factor integrante de la forma $x^a y^b$ si $AD - BC \neq 0$.

Solución: Al multiplicar la ecuación diferencial por el factor $x^a y^b$ obtengo:

$$\begin{aligned}(Ax^{p+a}y^{q+b+1} + Bx^{r+a}y^{s+b+1})\,\mathrm{d}\,x\\ +(Cx^{p+a+1}y^{q+b} + Dx^{r+a+1}y^{s+b})\,\mathrm{d}\,y = 0\end{aligned} \tag{213}$$

De ser exacta, se debe cumplir la condición:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(Ax^{p+a}y^{q+b+1} + Bx^{r+a}y^{s+b+1})\\ = \frac{\partial}{\partial x}(Cx^{p+a+1}y^{q+b} + Dx^{r+a+1}y^{s+b})\end{aligned} \tag{214}$$

$$\begin{aligned}(q+b+1)Ax^{p+a}y^{q+b} + (s+b+1)Bx^{r+a}y^{s+b}\\ = (p+a+1)Cx^{p+a}y^{q+b} + (r+a+1)Dx^{r+a}y^{s+b}\end{aligned} \tag{215}$$

Divido esta ecuación por $x^a y^b$:

$$\begin{aligned}(q+b+1)Ax^p y^q + (s+b+1)Bx^r y^s\\ = (p+a+1)Cx^p y^q + (r+a+1)Dx^r y^s\end{aligned} \tag{216}$$

Esta ecuación claramente se cumplirá si:

$$\begin{aligned}(q+b+1)A = (p+a+1)C\\ (s+b+1)B = (r+a+1)D\end{aligned} \tag{217}$$

Reescribo esto como:

$$\begin{aligned}-Ca + Ab = (p+1)C - (q+1)A\\ -Da + Bb = (r+1)D - (s+1)B\end{aligned} \tag{218}$$

Este sistema se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} -C & A \\ -D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p+1)C - (q+1)A \\ (r+1)D - (s+1)B \end{pmatrix} \tag{219}$$

La condición $AD - BC \neq 0$, implica que la matriz de 2×2 de la izquierda tiene inversa, y por lo tanto el sistema tiene una solución única para a y b tal que $x^a y^b$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

4.6.

Un sistema eléctrico compuesto por un inductor de inductancia L, una resistencia R y una fuente que aplica una fuerza electromotriz $E\sin(kt)$ satisface:

$$L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + Ri = E\sin(kt) \tag{220}$$

Resuelva esta ecuación diferencial.

Solución: Se divide la ecuación por L:

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}\sin kt \tag{221}$$

Luego, se multiplica esta por:

$$e^{\int R/L\,\mathrm{d}\,t} \tag{222}$$

$$e^{tR/L} \tag{223}$$

Con lo cual la ecuación diferencial queda:

$$e^{tR/L}\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + e^{tR/L}\frac{R}{L}i = \frac{E}{L}e^{tR/L}\sin kt \tag{224}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(ie^{tR/L}) = \frac{E}{L}e^{tR/L}\sin kt \tag{225}$$

Integrando ambos lados con respecto a t se obtiene la solución:

$$ie^{tR/L} = \frac{E}{L}\int e^{tR/L}\sin kt\,\mathrm{d}\,t \tag{226}$$

$$\boxed{i = ce^{-Rt/L} + \frac{E(R\sin(kt) - kL\cos(kt))}{R^2 + k^2L^2}} \tag{227}$$

Ayudantia 2

Pablo Marchant Campos

Lunes 7 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Trayectorias ortogonales

Algunas veces resulta de interes, dada una familia de curvas de la forma:

$$0 = f(x, y, C) \tag{1}$$

Donde C es una constante, encontrar otra familia de curvas $0 = g(x, y_2, B)$ (donde B es una constante) tal que intersecta a todas las curvas de la forma (1) en un ángulo fijo. En el caso de trayectoria ortogonales, este ángulo fijo es $\pi/2$.

Para resolver estos problemas, derivo (1) con respecto a x:

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[f(x, y, C)] \tag{2}$$

Resolviendo C de de (1) y reemplazando en (2) o viceversa, se obtiene la ecuación diferencial que satisface la familia de curvas y. Considero que esta ecuación se puede reescribir de la forma:

$$y' = h(x, y) \tag{3}$$

Luego, considero el resultado de geometría análitica que indica que si dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares, entonces satisfacen:

$$m_1 m_2 = -1 \tag{4}$$

Si quiero que las dos familias de curvas y e y_2 sean ortogonales, las pendientes de sus tangentes (o sea, sus derivadas) deben satisfacer una ecuación similar a (4):

$$\boxed{h(x, y_2) y_2' = -1} \tag{5}$$

Entonces, una ves se tiene la ecuación diferencial que satisface y, (5) entrega la ecuación diferencial que satisface la familia ortogonal y_2.

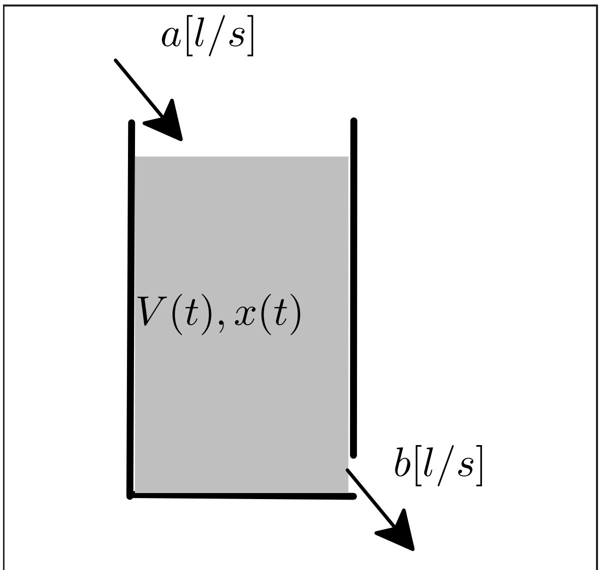


Figura 1: Mezcla en un tanque

1.2. Cambio de temperatura

Si un cuerpo a temperatura T_c es inserto en un medio a temperatura T_m que se mantiene fija, se verifica experimentalmente que la temperatura del cuerpo satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}\,T_c}{\mathrm{d}\,t} = -k(T_c - T_m) \tag{6}$$

Donde k es una constante que depende del medio y del cuerpo.

1.3. Mezclas

Considere un tanque que contiene una mezcla (digamos, de agua con sal). Si el vólumen de la mezcla contenida en el tanque se denota por $V(t)[l]$, la cantidad de sal en la mezcla como $x(t)[g]$, y además, al tanque entra un flujo de agua pura de $a[l/s]$, y sale un flujo de la mezcla (que se considera perfectamente homogenea) de $b[l/s]$

como muestra la figura 1, entonces $V(t)$ está dado por:

$$V(t) = V_0 + (a-b)t \tag{7}$$

Donde V_0 es el volumen inicial, y $x(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{x}{V(t)}b \tag{8}$$

Que es una sencilla ecuación separable.

Además, se puede considerar la concentración $C(t)[g/l]$ de la mezcla, que claramente estará dada por:

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \tag{9}$$

Por último, si el agua que ingresa al tanque no es pura, si no que tiene una concentración de sal $c[gr/l]$, entonces la ecuación diferencial que satisface $x(t)$ es:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{x}{V(t)}b + ac \tag{10}$$

1.4. Teoremas de existencia y unicidad

Si se considera la ecuación diferencial:

$$y' = f(x,y) \tag{11}$$

Se busca estudiar la existencia y unicidad de posibles soluciones en torno a ciertos puntos.

- **Existencia:**[1] Si $f(x,y)$ es continua en una región D:

$$D:\ a < x < b,\ c < y < d \tag{12}$$

  Y $(x_0, y_0) \in D$, entonces existe al menos una solución a (11) que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

- **Unicidad:**Si $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en una región D:

$$D:\ a < x < b,\ c < y < d \tag{13}$$

  Y $(x_0, y_0) \in D$, entonces existe una única solución a (11) que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

[1]El *Teorema de Peano* es similar a este, pero considera regiones mas generales que rectangulos

1.5. Análisis de ecuaciones autónomas y campos de direcciones

Una ecuación autonoma se puede escribir de la forma:

$$y' = f(y) \tag{14}$$

Esta ecuación es separable, pero de todos modos se pueden obtener conclusiones importantes sin resolver la ecuacíon. Primero que nada, noto que si $f(c) = 0$ para alguna constante c, entonces la función:

$$y = c \tag{15}$$

es una solución a la ecuación diferencial. Este tipo de soluciones con $y = cte$ son llamadas *puntos de equilibrio*. Si la condición inicial del problema es $y_0 = c$ (con $f(c) = 0$), entonces la solución particular es simplemente $y = c$.

Además de determinar los puntos de equilibrio de la ecuación, tambien se puede estudiar la naturaleza de los mismos. Si uno perturba ligeramente las condiciones iniciales del problema poniendo el sistema fuera del equilibrio, la solución particular resultante puede comportarse a grandes rasgos de tres formas, dependiendo la naturaleza del punto de equilibrio:

- **Atractor:** Si cuando el sistema es perturbado ligeramente, este tiende asintóticamente al punto de equilibrio, es decir, si:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = c \tag{16}$$

  el punto de equilibrio es estable. En una vecindad suficientemente pequeña alrededor de un punto de equilibrio estable, se debe cumplir que:

$$y < c \Rightarrow y' > 0, \quad y > c \Rightarrow y' < 0 \tag{17}$$

  Es decir, y es creciente bajo el punto de equlibrio y decreciente sobre el mismo.

- **Repulsor:** Si cuando el sistema es perturbado ligeramente, este no tiende asintóticamente al punto de equilibrio, es decir, si:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \neq c \tag{18}$$

  el punto de equilibrio es inestable. En una vecindad suficientemente pequeña alrededor de un punto de equilibrio inestable, se debe cumplir que:

$$y < c \Rightarrow y' < 0, \quad y > c \Rightarrow y' > 0 \tag{19}$$

  Es decir, y es decreciente bajo el punto de equlibrio y creciente sobre el mismo.

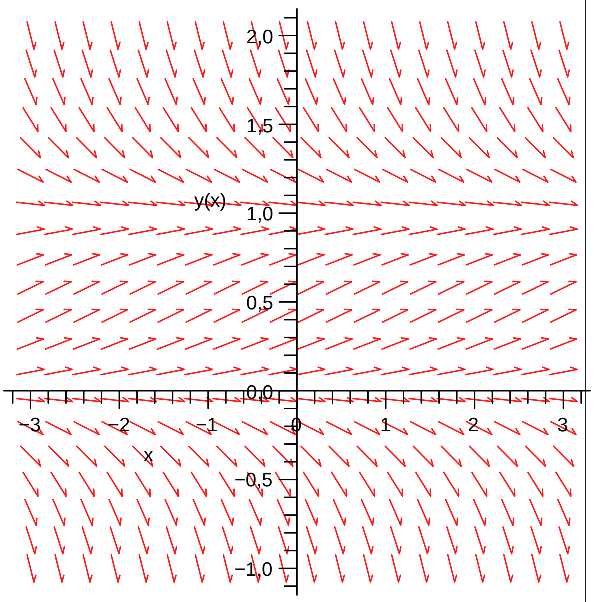


Figura 2: Campo de direcciones para $y' = y(1-y)$

- **Mixto:** Si cuando el sistema es perturbado ligeramente, su comportamiento posterir depende de la dirección de la perturbación, entonces el punto de equilibrio no se puede clasificar ni como estable ni como inestable.

Además, un punto de equilibrio es llamado **Estable** si y solo si es un atractor, y en caso contrario, es considerado **Inestable**.

Una herramienta util para estudiar cualitativamente una ecuación diferencial es su campo de direcciones. Si se tiene una ecuación diferencial $y' = g(x, y)$ entonces se conoce la pendiente de las soluciones a la ecuación para cada valor de x, y. El campo de direcciones resulta de colocar en varios puntos (x, y) del plano pequeños segmentos de recta con pendiente $g(x, y)$

Por ejemplo, puedo considerar la ecuación diferencial autonoma:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = y(1-y) \tag{20}$$

La figura 2 muestra el campo de direcciones de esta ecuación diferencial, y permite determinar a grandes rasgos la naturaleza de los puntos de equilibrio, notandose que $y = 0$ es un punto de equilibrio inestable e $y = 1$ es un punto de equilibrio estable.

2. Problemas

2.1.

1. Demuestre que las trayectorias ortogonales a $y = cx^5$ son elipses. Demuestre también que la razon entre el tamaño del semieje mayor y el semieje menor de cualquiera de estas elipses es igual a una constante.

2. Determine las trayectorias ortogonales a circunferencias centradas en torno a un punto (h, k).

2.2.

Un trozo de metal a $100°C$ se coloca en un líquido a $10°C$ cuya temperatura se mantiene constante. Pasados $100[s]$, se retira el trozo de metal y se mide su temperatura como $30°C$.

Si un trozo de metal similar se coloca a temperatura $50°C$ en el mismo liquido a temperatura $20°C$, ¿Cuánto tiempo se debe dejar sumerjido para que su temperatura se reduzca a $30°C$?

2.3.

A un tanque con una mezcla homogenea de agua y sal entran $5[l/s]$ de agua pura y salen $10[l/s]$ de mezcla. Si inicialmente se tienen $20[l]$ de mezcla y pasados $3[s]$ la concentración de sal de esta es de $100[g/l]$, determine la cantidad de sal que inicialmente tenía el tanque.

2.4.

a) Utilizando el teorema de existencia y unicidad Demuestre que el problema de valor inicial:

$$y\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 2y^2 + xy^3, \quad y(3) = 4 \tag{21}$$

Tiene única solución en un intervalo abierto alrededor de $t = 3$.

b) Resuelva el problema de valor inicial.

c) Determine la máxima región de definición de la solución.

2.5.

Resuelva y clasifique los puntos de equilibrio de la ecuación autónoma:

$$y' = \sin(y)\cos(2y) \tag{22}$$

3. Soluciones

3.1.

1. Utilizo y para denotar la familia de curvas original:

$$y = cx^5 \tag{23}$$

Derivando la ecuación diferencial con respecto a x obtengo:

$$y' = 5cx^4 \tag{24}$$
$$c = \frac{y'}{5x^4} \tag{25}$$

Reemplazando c en la expresión original para las curvas, obtengo la ecuación diferencial que satisfacen:

$$y = \frac{y'x}{5} \tag{26}$$
$$y' = 5y/x \tag{27}$$

La familia de soluciones ortogonal $y_2(x)$ debe satisfacer entonces:

$$(5y_2/x)y_2' = -1 \tag{28}$$
$$y_2' = -\frac{x}{5y_2} \tag{29}$$

Esta ecuación separable se resuleve facilmente:

$$y_2 \,\mathrm{d}\, y_2 = -\frac{1}{5}x \,\mathrm{d}\, x \tag{30}$$
$$\frac{1}{2}y_2^2 = -\frac{1}{10}x^2 + C \tag{31}$$
$$\frac{y_2^2}{2C} + \frac{x^2}{10C} = 1 \tag{32}$$
$$\left(\frac{y_2}{\sqrt{2C}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{10C}}\right)^2 = 1 \tag{33}$$

Tomando $2C = D^2$ obtengo:

$$\boxed{\left(\frac{y_2}{D}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}D}\right)^2 = 1} \tag{34}$$

De lo cual se observa inmediatamente que las trayectorias ortogonales son elipses, y que la razon entre sus semiejes mayor y menor es constante e igual a $\sqrt{5}$.

2. Las curvas satisfacen la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \tag{35}$$

Donde R es el radio de cualquiera de estas circunferencias. Derivando la ecuación con respecto a x puedo eliminar facilmente la constante arbitraria R:

$$2(x-h) + 2(y-k)y' = 0 \tag{36}$$
$$y' = \frac{h-x}{y-k} \tag{37}$$

La familia de soluciones ortogonales y_2 satisface entonces:

$$\left(\frac{h-x}{y_2-k}\right)y_2' = -1 \tag{38}$$

Resuelvo esta ecuación separable:

$$\frac{\mathrm{d}\, y_2}{y_2-k} = \frac{\mathrm{d}\, x}{x-h} \tag{39}$$
$$\ln|y_2-k| = \ln|x-h| + C \tag{40}$$
$$\ln\left|\frac{y_2-k}{x-h}\right| = C \tag{41}$$
$$\frac{y_2-k}{x-h} = \pm e^C \tag{42}$$
$$\boxed{y_2 - k = m(x-h)} \tag{43}$$

Donde tomé $m = \pm e^C$ como la constante arbitraria de la familia de curvas. Se ve facilmente que esta solución corresponde a rectas de pendiente arbitraria m que pasan por el punto (h,k), tal como sería de esperar.

3.2.

Inicialmente, tengo la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}\, T_c}{\mathrm{d}\, t} = -k(T_c - T_m) \tag{44}$$

Donde k es desconocida. Procedo a obtener la solución general de la ecuación separable:

$$\frac{\mathrm{d}\, T_c}{T_c - T_m} = -k \,\mathrm{d}\, t \tag{45}$$
$$\ln|T_c - T_m| = -kt + C \tag{46}$$
$$T_c - T_m = \pm e^C e^{-kt} \tag{47}$$
$$\boxed{T_c(t) = Ae^{-kt} + T_m} \tag{48}$$

Donde tomé $A = \pm e^C$. Tomando las condiciones iniciales y finales que debe satisfacer esta ecuación para describir la temperatura del primer cuerpo cuando se sumerje, obtengo un sistema de 2×2 para las constantes k y A:

$$\begin{aligned} 100 &= A + 10 \\ 30 &= Ae^{-100k} + 10 \end{aligned} \tag{49}$$

Despejando $A = 90$ de la primera ecuación y reemplazando en la segunda resuelvo k:

$$30 = 90e^{-100k} + 10 \tag{50}$$

$$\frac{2}{9} = e^{-100k} \tag{51}$$

$$\boxed{k = -\frac{\ln 2 - \ln 9}{100}} \tag{52}$$

De modo que la solución general para la interacción entre este cuerpo y el agua es:

$$T_c(t) = Ae^{(\ln 2 - \ln 9)t/100} + T_m \tag{53}$$

Considerando el segundo cuerpo, inicialmente tengo $t = 0, T_c = 50, T_m = 20$, y finalmente, para un tiempo t_f que busco determinar, se debe cumplir que $T_c = 30, T_m = 20$. Esto me entrega un sistema de 2×2 para t_f y A:

$$\begin{aligned} 50 &= A + 20 \\ 30 &= Ae^{(\ln 2 - \ln 9)t_f/100} + 20 \end{aligned} \tag{54}$$

Despejando $A = 30$ de la primera ecuación y reemplazando en la segunda, puedo resolver t_f:

$$30 = 30e^{(\ln 2 - \ln 9)t_f/100} + 20 \tag{55}$$

$$\frac{1}{3} = e^{(\ln 2 - \ln 9)t_f/100} \tag{56}$$

$$\ln 1 - \ln 3 = \frac{(\ln 2 - \ln 9)t_f}{100} \tag{57}$$

$$\boxed{t_f = \frac{100(\ln 1 - \ln 3)}{\ln 2 - \ln 9}} \tag{58}$$

3.3.

Para esta mezcla tendré:

$$V(t) = 20 - 5t \tag{59}$$

Y la ecuación diferencial para la cantidad de sal en el tanque es:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{-10x}{20 - 5t} \tag{60}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{2x} = \frac{\mathrm{d}\,t}{t - 4} \tag{61}$$

$$\frac{1}{2}\ln|x| = \ln|t - 4| + C \tag{62}$$

$$\ln|x| = 2\ln|t - 4| + 2C \tag{63}$$

$$\ln|x| = \ln(t - 4)^2 + 2C \tag{64}$$

$$|x| = e^{2C}(t - 4)^2 \tag{65}$$

$$x = \pm e^{2C}(t - 4)^2 = D(t - 4)^2 \tag{66}$$

Donde tome $D = \pm e^{2C}$ como la constante arbitraria de integración. La concentración de sal de la mezcla estará dada entonces por:

$$C(t) = \frac{D(t - 4)^2}{20 - 5t} \tag{67}$$

para $t = 3$ tengo $C = 100$:

$$100 = \frac{D}{5} \tag{68}$$

$$D = 500 \tag{69}$$

De modo que la cantidad de sal en el tanque está dada por:

$$x = 500(t - 4)^2 \tag{70}$$

Y la cantidad inicial de sal es simplemente esta expresión evaluada en $t = 0$:

$$\boxed{x(0) = (500 \times 16)[g] = 8000[g]} \tag{71}$$

3.4.

a) Para $y \neq 0$ tengo:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(x, y) = 2y + xy^2 \tag{72}$$

Tengo que f y $\partial f/\partial y$ son continuas en la región $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, y como $(3, 4) \in D$, existe una única solución valida en algún intervalo abierto en torno a $t = 3$.

b) Reescribo la ecuación como:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 2y = xy^2 \tag{73}$$

Que es una ecuación diferencial de Bernoulli con $n = 2$. Multiplico la ecuación por $(1-n)y^{-n} = -y^{-2}$:

$$-y^{-2}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + 2y^{-1} = -x \tag{74}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[y^{-1}\right] + 2y^{-1} = -x \tag{75}$$

Hago el cambio de variable $u = y^{-1}$ con lo cual obtengo una ecuación diferencial en u:

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} + 2u = -x \tag{76}$$

Multiplico por el factor $e^{2\int \mathrm{d}\,x} = e^{2x}$:

$$e^{2x}\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} + 2e^{2x}u = -xe^{2x} \tag{77}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[e^{2x}u\right] = -xe^{2x} \tag{78}$$

$$e^{2x}u = -\int xe^{2x}\,\mathrm{d}\,x \tag{79}$$

$$e^{2x}u = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}\,x \tag{80}$$

$$e^{2x}u = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}\,x \tag{81}$$

$$e^{2x}u = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C \tag{82}$$

$$u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \tag{83}$$

Y la solución general a la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{Ce^{-2x} + 1/4 - x/2} \tag{84}$$

Utilizando las condiciones resuelvo C para la solución particular:

$$4 = \frac{1}{Ce^{-6} + 1/4 - 3/2} \tag{85}$$

$$4Ce^{-6} - 5 = 1 \tag{86}$$

$$C = \frac{2}{3}e^{6} \tag{87}$$

Y la solución particular queda:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2e^{6-2x}/3 + 1/4 - x/2}} \tag{88}$$

c) $y(x)$ está bien definida excepto en aquellos puntos en los cuales:

$$2e^{6-2x}/3 + 1/4 - x/2 = 0 \tag{89}$$

Esta ecuación solo se puede resolver mediante métodos numéricos (hasta donde yo se...), pero aun asi, es posible hacer ciertas deducciones. Defino:

$$g(x) = 2e^{6-2x}/3 + 1/4 - x/2 \tag{90}$$

Esta función es continua para todo x y además se ve facilmente que:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty \tag{91}$$

Lo cual implica que $g(x) = 0$ tiene al menos una solución. Además, observo que:

$$g'(x) = -4e^{6-2x} - 1/2 < 0 \tag{92}$$

Por lo tanto, $g(x)$ es monotonamente decreciente, lo cual junto con la conclusión anterior implica que $g(x) = 0$ tiene solo una solución, a la cual llamo x_0. Con esto tendré que:

$$\begin{aligned} -\infty < x < x_0 \Rightarrow &\quad g(x) > 0 \\ x_0 < x < \infty \Rightarrow &\quad g(x) < 0 \end{aligned} \tag{93}$$

Como $y(3) = 4$, $g(3) > 0$, y se ve facilmente con esto que el intervalo I abierto de máxima definición para $y(x)$ es aquel en el cual $g(x) > 0$:

$$\boxed{I : \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < x_0\}} \tag{94}$$

Finalmente, la resolución numérica de x_0 entrega $x_0 \sim 3,2$.

3.5.

Analizando la ecuación, se puede ver sin mucha dificultad que los puntos de equilibrio son de la forma:

$$\begin{aligned} &2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{4},\ 2n\pi + \frac{3\pi}{4}, 2n\pi + \pi, \\ &\qquad 2n\pi + \frac{5\pi}{4},\ 2n\pi + \frac{7\pi}{4} \end{aligned} \tag{95}$$

Con $n \in \mathbb{Z}$. Para determinar la naturaleza de estos, es necesario determinar el signo de y' en cada región entre puntos de equilibrio. Para ello noto que:

$$\begin{aligned}
2n\pi < y < 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad &\Rightarrow \cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \frac{\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \cos(2y) < 0 \\
2n\pi + \frac{3\pi}{4} < y < 2n\pi + \pi \quad &\Rightarrow \cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \pi < y < 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \quad &\Rightarrow \cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \frac{5\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{7\pi}{4} \quad &\Rightarrow \cos(2y) < 0 \\
2n\pi + \frac{7\pi}{4} < y < 2n\pi + 2\pi \quad &\Rightarrow \cos(2y) > 0
\end{aligned} \tag{96}$$

De igual manera, para $\sin(y)$ tengo que:

$$\begin{aligned}
2n\pi < y < 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y) > 0 \\
2n\pi + \frac{\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y) > 0 \\
2n\pi + \frac{3\pi}{4} < y < 2n\pi + \pi \quad &\Rightarrow \sin(y) > 0 \\
2n\pi + \pi < y < 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y) < 0 \\
2n\pi + \frac{5\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{7\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y) < 0 \\
2n\pi + \frac{7\pi}{4} < y < 2n\pi + 2\pi \quad &\Rightarrow \sin(y) < 0
\end{aligned} \tag{97}$$

Utilizando (96) y (97) se ve de forma inmediata que:

$$\begin{aligned}
2n\pi < y < 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \frac{\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) < 0 \\
2n\pi + \frac{3\pi}{4} < y < 2n\pi + \pi \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \pi < y < 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) < 0 \\
2n\pi + \frac{5\pi}{4} < y < 2n\pi + \frac{7\pi}{4} \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) > 0 \\
2n\pi + \frac{7\pi}{4} < y < 2n\pi + 2\pi \quad &\Rightarrow \sin(y)\cos(2y) < 0
\end{aligned} \tag{98}$$

Con esto, se pueden clasificar inmediatamente los puntos de equilibrio como:

- **Atractores** Los puntos de equilibrio que corresponden a atractores son:

$$2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 2n\pi + \pi, \quad 2n\pi + \frac{7\pi}{4} \tag{99}$$

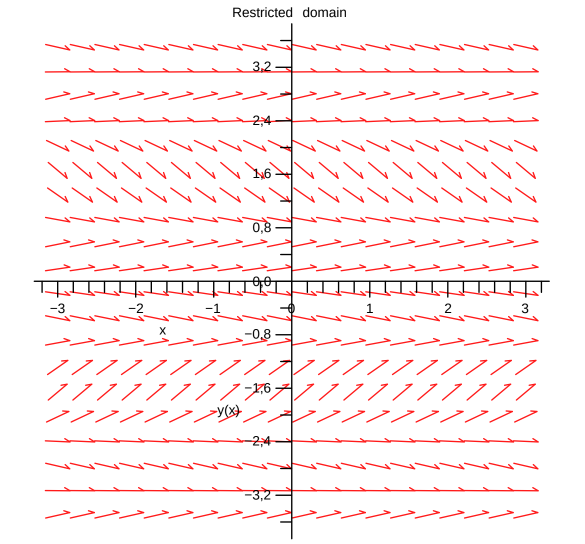


Figura 3: Campo de direcciones para $y' = \sin(y)\cos(2y)$

- **Repulsores** Los puntos de equilibrio que corresponden a repulsores son:

$$2n\pi, \quad 2n\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \tag{100}$$

La figura (3) muestra el campo de pendientes de la ecuación diferencial, y concuerda con los resultados obtenidos al clasificar los puntos de equilibrio.

Ayudantia 3

Pablo Marchant Campos

Lunes 14 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Ecuación Diferencial Lineal Homogenea

La ecuación diferencial lineal homogenea de orden n para una función $y(x)$ es de la forma general:

$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + f_1 y' + f_0 y = 0 \tag{1}$$

Donde las funciones f_i son funciones cualquiera de la variable independiente x. En notación de operadores, se puede escribir como:

$$Py = 0, \quad P = f_n D^n + f_{n-1} D^{n-1} + ... + f_1 D + f_0 \tag{2}$$

Donde el operador diferencial D denota la operación $\mathrm{d} / \mathrm{d}\, x$. Claramente el operador diferencial P es lineal, o sea, dadas dos funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ estas cumplen:

$$P(Ag_1 + Bg_2) = APg_1 + BPg_2 \tag{3}$$

Como consecuencia de esta linealidad, se tiene una de las propiedades mas importantes de estas ecuaciones que es que dadas dos soluciones y_1 e y_2, entonces se cumple que cualquier combinación lineal de ambas es solución, es decir:

$$Py_1 = 0, \quad Py_2 = 0 \Rightarrow P(Ay_1 + By_2) = 0, \quad A, B \in \mathbb{C} \tag{4}$$

Las soluciones a una ecuación de la forma (1) forman un espacio vectorial de n dimensiones. Esto implica que es posible en principio encontrar n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de (1) tal que estas son LI, y cualquier otra solución y_h se puede obtener como combinación lineal de estas n soluciones, es decir:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0 \Leftrightarrow C_i = 0, \; 1 \le i \le n \tag{5}$$

$$Py_h = 0 \Longleftrightarrow y_h = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i, \quad A_i \in \mathbb{C}, \; 1 \le i \le n \tag{6}$$

De aqui se ve que la solución general y_h del sistema homogeneo tiene n constantes arbitrarias $A_1, \ldots, A_n$, las cuales se resuelven mediante la aplicación de condiciones iniciales.

1.2. Ecuación Diferencial Lineal Homogenea de Coeficientes Constantes

Una ecuación diferencial de coeficientes constantes (reales) es de la forma:

$$c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0, \; c_i \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Para resolver esta ecuación, busco soluciones de la forma:

$$y(x) = e^{\lambda x} \tag{8}$$

Al substituir esto en la ecuación diferencial se obtiene:

$$e^{\lambda x} \left(c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda^2 + c_0 \lambda \right) = 0 \tag{9}$$

$$c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda^2 + c_0 \lambda = 0 \tag{10}$$

Esta ecuación algebraica para los λ es llamado el **polinomio característico** de (7). En base a sus soluciones, es siempre posible obtener n soluciones LI de (7). Considero 3 casos particulares para el polinomio característico:

1.2.1. n raices distintas

En el caso de que la ecuación característica tenga n raices distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se tendrá que (10) se puede reescribir como:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) = 0 \tag{11}$$

En este caso, obtengo inmediatamente n soluciones LI a (7):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}, \tag{12}$$

Y la solución general al sistema homogeneo está dada por:

$$Py_h = 0 \Longleftrightarrow y_h = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i x}, \quad A_i \in \mathbb{C} \; 1 \le i \le n \tag{13}$$

1.2.2. Raices repetidas

Si la ecuación característica tiene una raíz repetida (llamemosla λ_r) con multiplicidad algebraica a, entonces (10) se puede reescribir como:

$$(\lambda - \lambda_r)^a(\dots) = 0 \tag{14}$$

Donde $(\dots)$ es un polinomio de λ de grado $(n-a)$ del cual λ_r no es raíz. De suceder esto, las soluciones de la forma $e^{\lambda x}$ no forman un conjunto de n soluciones LI y son insuficientes para obtener la solución general. Sin embargo, se puede demostrar que:

$$y_r = A_1 e^{\lambda x} + A_2 x e^{\lambda x} + \dots + A_a x^a e^{\lambda x} \tag{15}$$

Es solución de la ecuación diferencial. Como y_r es combinación lineal de a funciones linealmente independientes, esto permite completar las n soluciones LI requeridas para obtener la solución general.

1.2.3. Raices complejas

Si (10) tiene una solución compleja (llamemosla $\lambda_{\mathbb{C}}$), esta tendrá la forma:

$$\lambda_{\mathbb{C}} = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Por propiedades básicas de polinomios de coeficientes reales, tendre que su conjugado[1] $\lambda_{\mathbb{C}}^*$ también será solución. Esto indica que existen soluciones a la ecuación diferencial de la forma:

$$y = Ae^{\lambda_{\mathbb{C}} x} + Be^{\lambda_{\mathbb{C}}^* x}, \quad A, B \in \mathbb{C} \tag{17}$$
$$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} \tag{18}$$
$$y = e^{ax}\left(Ae^{ibx} + Be^{-ibx}\right) \tag{19}$$

Para escribir esto de una forma que (normalmente) simplifica la tarea de aplicar condiciones iniciales, utilizo la fórmula de Euler:

$$e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b) \tag{20}$$

Con lo cual (19) queda:

$$\begin{aligned} y = Ae^{ax}&(\cos(bx) + i\sin(bx)) \\ &+ Be^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \end{aligned} \tag{21}$$
$$y = (A+B)e^{ax}\cos(bx) + (A-iB)e^{ax}\sin(bx) \tag{22}$$

[1] Aqui denotare la operación de tomar el conjugado de un número complejo con el símbolo $*$. Es decir,

$$(a+ib)^* = (a-ib)$$

Como A y B son números complejos arbitrarios, puedo reescribir esto como:

$$y = Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) \tag{23}$$

Esta forma de la solución habitualmente resulta mas comoda que (17)

1.3. Ecuación Diferencial Lineal No Homogenea

Una ecuación diferencial lineal no homogenea de órden n es de la forma general:

$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_1 y' + f_0 y = G(x) \tag{24}$$

Y su sistema homogeneo asociado es:

$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_1 y' + f_0 y = 0 \tag{25}$$

Dadas dos soluciones particulares y_1 e y_2 de (24), es trivial demostrar que $(y_1 - y_2)$ es solución de (25). Por ello, cualquier solución y_g de (24) se puede construir de una solución particular y_p de (24) y una solución y_h de su sistema homogeneo asociado (25):

$$y_g = y_p + y_h \tag{26}$$

Una ves se obtiene cualquier solución y_p del sistema no homogeneo, y se resuelve la forma general de las soluciones y_h del sistema homogeneo, esta expresión permite obtener la forma general de todas las soluciones y_g del sistema no homogeneo. Como la forma general de y_h contiene n constantes arbitrarias, y_g tambien contiene n constantes arbitrarias que se resuelven de las condiciones iniciales.

1.4. Principio de superposición

Considero dos ecuaciones diferenciales:

$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_1 y' + f_0 y = G(x) \tag{27}$$
$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_1 y' + f_0 y = Q(x) \tag{28}$$

El principio de superposición indica que si y_{1g} es la solución general de (27) e y_{2g} es la solución general de (28), entonces $(y_{1g} + y_{2g})$ es la solución general de la ecuación:

$$f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_1 y' + f_0 y = G(x) + Q(x) \tag{29}$$

1.5. Condiciones Iniciales

Un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial lineal de órden n de la forma (24) o (25) generalmente especifica el valor de y y sus primeras $n-1$ derivadas para $x = x_0$. Es decir, un PVI se plantea de la forma:

$$\begin{gathered} f_n y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + f_1 y' + f_0 y = G(x), \\ y(x_0) = y_{x_0},\ y'(x_0) = y'_{x_0}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{x_0}^{(n-1)} \end{gathered} \tag{30}$$

Donde $y_{x_0}, y'_{x_0}, \ldots, y_{x_0}^{(n-1)}$ son constantes. Al aplicar estas condiciones iniciales a la solución general (26) se obtiene un sistema de $n \times n$ para las n constantes arbitrarias de la solución general.

1.6. Coeficientes Indeterminados

Considero una ecuación diferencial lineal no homogenea, escrita en notación de operadores:

$$Py = Q(x), \quad P = f_n D^n + f_{n-1} D^{n-1} + ... + f_1 D + f_0 \tag{31}$$

Considero ahora que $Q(x)$ es tal, que existe un operador diferencial polinomial P_2 de orden m tal que:[2]

$$P_2 Q(x) = 0 \tag{32}$$

Se suele llamar al operador P_2 un aniquilador de $Q(x)$. De cumplirse (32), una solución $y(x)$ de (31) debe satisfacer tambien que:

$$P_2 P y = P_2 Q(x) = 0 \tag{33}$$

Sin embargo, esta es una ecuación diferencial lineal homogenea de orden $(n+m)$, y por lo tanto tendrá m constantes de integración mas de las necesarias.

Para resolver esto, tomo la solución general y_{h2} a la ecuación diferencial (33) y elimino de ella los términos que pertenecen a la solución y_h de la ecuación homogenea asociada a (31), obteniendo asi la forma de la solución particular y_p. Reemplazando y_p en (31) se obtiene un sistema de $m \times m$ (ver en los ejercicios como efectivamente se hace esto), cuya solución me permitira resolver m constantes.

Notar que este método solo se puede aplicar si es que existe un operador P_2 tal que $P_2 Q(x) = 0$. Esto en general será posible si es que un conjunto formado por $Q(x)$ y algunas de sus derivadas forman un conjunto LD.

[2] Con esto me refiero a que P_2 tiene la forma

$$P_2 = g_0(x) + g_1(x) D + \cdots + g_m(x) D^m, \quad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}$$

Ejemplo: Si tengo:

$$Q = e^x \sin(x) \tag{34}$$
$$Q' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \tag{35}$$
$$Q'' = 2e^x \cos(x) \tag{36}$$

Entonces $\{Q, Q', Q''\}$ forman un conjunto LD ya que:

$$2Q - 2Q' - Q'' = 0 \tag{37}$$
$$(2 - 2D - D^2) Q = 0 \tag{38}$$

De lo cual obtengo que el aniquilador para $Q(x) = e^x \sin(x)$ es:

$$P_2 = (2 - 2D - D^2) \tag{39}$$

Normalmente este procedimiento es inecesario, ya que el aniquilador se puede reconocer facilmente reconociendo la ecuación diferencial homogenea de la cual $Q(x)$ es solución. De este modo, puedo encontrar facilmente los aniquiladores de las siguientes funciones $Q(x)$ (a continuación tomo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria):

- $Q(x) = Cx^n e^{ax} \cos(bx), \quad Q(x) = Cx^n e^{ax} \sin(bx)$:

$$P_2 = ((D - a)^2 + b)^{n+1} \tag{40}$$

- $Q(x) = Cx^n e^{ax}$:

$$P_2 = (D - a)^{n+1} \tag{41}$$

- $Q(x) = Cx^n$:

$$P_2 = D^{n+1} \tag{42}$$

- $Q(x) = C$:

$$P_2 = D \tag{43}$$

1.7. Existencia y Unicidad

Considero un PVI de la forma:

$$\begin{gathered} y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + f_1 y' + f_0 y = Q(x) \\ y(x_0) = y_{x_0},\ y'(x_0) = y'_{x_0}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{x_0}^{(n-1)} \end{gathered} \tag{44}$$

El teorema de existencia y unicidad indica que si los coeficientes $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x en un intervalo abierto I tal que $x_0 \in I$, entonces el PVI (44) tiene una solución única.

2. Problemas

2.1.

Obtenga la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

2.2.

Resuelva el problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = 0$$

$$y(\pi/8) = A,\ y'(\pi/8) = B$$

2.3.

Mediante el método de coeficientes indeterminados, obtenga la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$

b) $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^x + 2\sin^2(x)$

2.4.

Usando el método de coeficientes indeterminados, encontrar la forma de la solucion particular de:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = xe^{-x} + x^2\sin(x)$$

2.5.

Determine los intervalos de $\mathbb{R}$ a los cuales puede pertenecer b de modo que se pueda asegurar que el PVI:

$$\ln(1-x)y'' + x^2y' - y = \frac{1}{x^2-4}, \quad y(b) = a$$

Donde $a \in \mathbb{R}$, tenga solución única.

3. Soluciones

3.1.

Tengo:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{45}$$
$$(D-2)^2y = 0 \tag{46}$$

El polinomio característico de la ecuación es:

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \tag{47}$$

Que tiene solo una raiz $\lambda = 2$ con multiplicidad algebráica 2. Por lo tanto, la solución general al sistema homogeneo esta dada por:

$$\boxed{y_h = (A + Bx)e^{2x}} \tag{48}$$

3.2.

Tengo la ecuación:

$$(D^2 + 4)y = 0 \tag{49}$$

Su polinomio característico es:

$$\lambda^2 = -4 \tag{50}$$
$$\lambda = \pm 2i \tag{51}$$

Por lo tanto, la solución general y su primera derivada son:

$$y_h = \quad C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) \tag{52}$$
$$y_h' = \quad -2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x) \tag{53}$$

Aplicando las condiciones iniciales obtengo un sistema de 2×2 para A, B:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 \\ B &= -\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 \end{aligned} \tag{54}$$

Resolviendo este sistema obtengo:

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(2A - B), \quad C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(2A + B) \tag{55}$$

Por lo tanto, la solución particular buscada es:

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{4}(2A - B)\cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{4}(2A + B)\sin(2x)} \tag{56}$$

3.3.

a) Resuelvo primero la ecuación homogenea asociada:

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{57}$$
$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \tag{58}$$
$$(D + 2)^2y = 0 \tag{59}$$

La solución al polinomio característico asociado es $\lambda = -2$ con multiplicidad algebraica 2.Por ello, la solución general de la ecuación homogenea es:

$$\boxed{y_h = (C_0 + C_1 x)e^{-2x}} \tag{60}$$

Procedo ahora a utilizar el método de coeficientes indeterminados. Tengo que:

$$Q(x) = 3xe^{-2x} \tag{61}$$

Y como $3xe^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial $(D+2)^2 y(x) = 0$, el aniquilador de $Q(x)$ es el operador $(D+2)^2$. Aplicando este operador a la ecuación diferencial original obtengo:

$$(D+2)^4 y = (D+2)^2 \left(3xe^{-2x}\right) = 0 \tag{62}$$

La solución y_{h2} a esta ecuación diferencial está dada por:

$$y_{h2} = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3)e^{-2x} \tag{63}$$

Eliminando términos comunes a y_h obtengo la forma de la solución particular:

$$y_p = (B_2 x^2 + B_3 x^3)e^{-2x} \tag{64}$$

Sus primeras dos derivadas son:

$$y_p' = 2B_2 xe^{-2x} + (3B_3 - 2B_2)x^2 e^{-2x} - 2B_3 x^3 e^{-2x} \tag{65}$$

$$y_p'' = 2B_2 e^{-2x} + (6B_3 - 8B_2)xe^{-2x} + (4B_2 - 12B_3)x^2 e^{-2x} + 4B_3 x^3 e^{-2x} \tag{66}$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial queda:

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 3xe^{-2x} && (67)\\ (2B_2 + 6B_3 x)\,e^{-2x} &= 3xe^{-2x} && (68)\\ 2B_2 + 6B_3 x &= 3x && (69)\\ 2B_2 + (6B_3 - 3)x &= 0 && (70) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes a cero obtengo:

$$\begin{aligned} 2B_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad B_2 = 0 && (71)\\ (6B_3 - 3) = 0 \quad &\rightarrow \quad B_3 = 1/2 && (72) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}} \tag{73}$$

Y la solución general se obtiene simplemente sumando y_p e y_h:

$$\boxed{y_g = \frac{1}{2}x^3 e^{-2x} + (C_0 + C_1 x)e^{-2x}} \tag{74}$$

b) Reescribiendo $\sin^2(x)$ como $(1 - \cos(2x)/2)$ obtengo:

$$y'' + 3y' + 2y = 9 + 6e^x - \cos(2x) \tag{75}$$

Resuelvo primero el sistema homogeneo asociado:

$$\begin{aligned} (D^2 + 3D + 2)y &= 0 && (76)\\ (D+2)(D+1)y &= 0 && (77) \end{aligned}$$

La solución a la ecuación homogenea es entonces:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \tag{78}$$

Ahora determino un aniquilador para el término no homogeneo. Para ello veo que:

$$\begin{aligned} D(9) &= 0, && (79)\\ (D-1)(6e^x) &= 0, && (80)\\ (D^2+4)(-\cos(2x)) &= 0 && (81) \end{aligned}$$

De modo que:

$$D(D-1)(D^2+4)(9 + 6e^x - \cos(2x)) = 0 \tag{82}$$

Entonces, el aniquilador del término no homogeneo es el operador $D(D-1)(D^2+4)$. Aplicando este operador a la ecuación diferencial original obtengo:

$$D(D-1)(D^2+4)(D+2)(D+1)y = 0 \tag{83}$$

La solución y_{2h} de esta ecuación es:

$$y_{2h} = B_1 e^{-x} + B_2 e^{-2x} + B_3 \cos(2x) + B_4 \sin(2x) + B_5 e^x + B_6 \tag{84}$$

Eliminando términos similares de y_h obtengo la forma de la solución particular:

$$y_p = B_3 \cos(2x) + B_4 \sin(2x) + B_5 e^x + B_6 \tag{85}$$

Sus primeras dos derivadas son:

$$\begin{aligned} y_p' &= -2B_3 \sin(2x) + 2B_4 \cos(2x) + B_5 e^x && (86)\\ y_p' &= -4B_3 \cos(2x) - 4B_4 \sin(2x) + B_5 e^x && (87) \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial queda:

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 9 + 6e^x - \cos(2x) \tag{88}$$

$$\begin{aligned}(6B_4 - 2B_3)\cos(2x) - (2B_4 + 6B_3)\sin(2x)\\ + 6B_5e^x + 2B_6 = 9 + 6e^x - \cos(2x)\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}(6B_4 - 2B_3 + 1)\cos(2x) - (2B_4 + 6B_3)\sin(2x)\\ + (6B_5 - 6)e^x + (2B_6 - 9) = 0\end{aligned} \tag{90}$$

Igualando coeficientes a cero obtengo el sistema:

$$\begin{aligned}6B_4 - 2B_3 + 1 =&0\\ 2B_4 + 6B_3 =&0\\ 6B_5 - 6 =&0\\ 2B_6 - 9 =&0\end{aligned} \tag{91}$$

Resolviendo este sistema obtengo:

$$B_3 = \frac{1}{20},\ B_4 = -\frac{3}{20},\ B_5 = 1,\ B_6 = \frac{9}{2} \tag{92}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x) + e^x + \frac{9}{2}} \tag{93}$$

Y la solución general se obtiene simplemente sumando y_p e y_h:

$$\boxed{y_g = y_p + y_h} \tag{94}$$

3.4.

La ecuación se puede ecribir como:

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = xe^{-x} + x^2\sin(x) \tag{95}$$

$$(D^2 + 1)^2 y = xe^{-x} + x^2\sin(x) \tag{96}$$

La solución homogenea es:

$$\boxed{y = (A + Bx)\cos(x) + (C + Dx)\sin(x)} \tag{97}$$

Luego, se debe ver que operaciones hacer sobre el término no homogeneo para eliminarlo. Para ello veo cual combinación lineal de sus derivada da cero. Tengo:

$$h(x) = xe^{-x} + x^2\sin(x) \tag{98}$$

Y tomo:

$$h_1(x) = xe^{-x}, \quad h_2(x) = x^2\sin(x) \tag{99}$$

$$\to h_1(x) + h_2(x) = h(x) \tag{100}$$

Y ahora veo por separado h_1 y h_2

1. h_1: xe^{-x} es solución de la ecuación diferencial $(D+1)^2y = 0$, por lo tanto el aniquilador de h_1 es $(D+1)^2$.
2. h_2: $x^2\sin(x)$ es solución de $(D^2+1)^3y = 0$ Por lo tanto, el aniquilador de h_2 es $(D^2+1)^3$

Opero entonces ambos lados de la ecuación diferencial con $(D+1)^2(D^2+1)^3$, obteniendo asi una ecuación homogenea:

$$(D+1)^2(D^2+1)^5y = 0 \tag{101}$$

Su solución sera:

$$\begin{aligned}y =&(a_0 + a_1x)e^{-x}\\ &+ (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)\sin(x)\\ &+ (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)\cos(x)\end{aligned} \tag{102}$$

Para la solución particular a la ecuación diferencial original, basta considerar aquellos términos que no pertenecen a la solución homogenea:

$$\boxed{\begin{aligned}y =&(a_0 + a_1x)e^{-x}\\ &+ (b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)\sin(x)\\ &+ (c_2x^2 + c_3x^3 + b_4x^4)\cos(x)\end{aligned}} \tag{103}$$

3.5.

Divido primero por el coeficiente de y'', obteniendo:

$$y'' + \frac{x^2}{\ln(1-x)}y' - \frac{1}{\ln(1-x)}y = \frac{1}{(x^2-4)\ln(1-x)} \tag{104}$$

Aqui tengo:

$$\begin{aligned}f_1(x) =&\frac{x^2}{\ln(1-x)},\\ f_0(x) =&\frac{1}{\ln(1-x)},\\ Q(x) =&\frac{1}{(x^2-4)\ln(1-x)}\end{aligned} \tag{105}$$

Tengo que $\ln(1-x)$ se indefine para $x > 1$, $\ln(1-0) = 0$ y $((\pm 2)^2 - 4) = 0$. Con esto, resulta trivial ver que los intervalos en los cuales el teorema de existencia y unicidad asegura la existencia de una solución única a un PVI (o sea, aquellos en los cuales f_1, f_0 y Q son continuas) son:

$$\boxed{I_1 = (-\infty, -2), \quad I_2 = (-2, 0), \quad I_3 = (0, 1)} \tag{106}$$

4. Mas Problemas

4.1.

Obtenga la solución particular de la ecuación:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Solución: La ecuación diferencial se puede escribir como:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \tag{107}$$
$$(D - 2)(D - 1)y = 0 \tag{108}$$

De modo que la solución general de la ecuación, y su primera derivada son:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^x \\ y' &= 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x \end{aligned}} \tag{109}$$

La condición inicial $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ entregan un sistema para C_1 y C_2:

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2 \tag{110}$$
$$y'(0) = 0 = 2C_1 + C_2 \tag{111}$$

Resolviendo C_1 y C_2 obtengo:

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 2 \tag{112}$$

Y la solución particular requerida es:

$$\boxed{y = -e^{2x} + 2e^x} \tag{113}$$

4.2.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el método de coeficientes indeterminados:

a) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$

b) $y''' - y' = e^{2x}\sin^2(x)$

Solución:

a) La ecuación diferencial se puede escribir usando operadores como:

$$(D + 1)(D + 2)y = e^{-2x} + x^2 \tag{114}$$

La solución de la ecuación homogenea es:

$$y_h = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} \tag{115}$$

Ahora, como $D^3(x^2) = 0$ y $(D + 2)(e^{-2x}) = 0$, al aplicar el operador diferencial $(D+2)D^3$ a ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene una ecuación homogenea:

$$(D + 1)(D + 2)^2 D^3 y = 0 \tag{116}$$

La solución general de esta ecuación se obtiene de manera inmediata:

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \tag{117}$$

Eliminando términos comunes a la solución de la ecuación homogenea, se obtiene la forma de la solución particular:

$$y_p = c_1 x e^{-2x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) \tag{118}$$

Reemplazando esta solución en la ecuación diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} -c_1 e^{-2x} + (2c_4 + 3c_3 + 2c_2) + \\ (6c_4 + 2c_3)x + (2c_4)x^2 = e^{-2x} + x^2 \end{aligned} \tag{119}$$

De lo cual se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -c_1 &= 1 \\ 2c_4 + 3c_3 + 2c_2 &= 0 \\ 6c_4 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_4 &= 1 \end{aligned} \tag{120}$$

Cuya solución es:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = \frac{7}{4}, \quad c_3 = -\frac{3}{2}, c_4 = \frac{1}{2} \tag{121}$$

Con lo cual se ha resuelto la solución particular de la ecuación:

$$\boxed{y_p = -xe^{-2x} + \frac{7}{4} + -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2} \tag{122}$$

Y la solución general es simplemente:

$$y = y_p + y_h \tag{123}$$

b) La ecuación diferencial resulta mas facil de resolver reemplazando ($\sin^2 x = 1/2 - \cos(2x)/2$):

$$y''' - y' = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} \tag{124}$$

El primer término de la derecha se puede aniquilar con el operador $(D-2)$. Para eliminar el segundo término basta notar que $\cos(2x)e^{2x}/2$ es solución de la ecuación diferencial $((D-2)^2-2)y=0$, de modo que el aniquilador buscado es $((D-2)^2-2)$.

Volviendo a la ecuación diferencial original, esta se puede reescribir como:

$$(D^3-D)y = D(D-1)(D+1)y \tag{125}$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} \tag{126}$$

La solución de la ecuación homogenea asociada es:

$$y_h = a_1 + a_2e^x + a_3e^{-x} \tag{127}$$

Ahora, aplicando el operador diferencial $(D-2)((D-2)^2-2)$ a ambos lados de la ecuación se obtiene una ecuación homogenea:

$$(D-2)((D-2)^2-2)D(D-1)(D+1)y = 0 \tag{128}$$

Por lo tanto, la forma de la solución particular de la ecuación original, omitiendo términos comunes a la solución homogenea será:

$$y_p = e^{2x}(c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)) \tag{129}$$

Reemplazando y_p en la ecuación diferencial se tiene:

$$\begin{gathered} -2e^{2x}(-3c_1 + \cos(2x)(9c_2-7c_3)+ \\ \sin(2x)(9c_3+7c_2)) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} \end{gathered} \tag{130}$$

De lo cual se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} 6c_1 &= \frac{1}{2} \\ 9c_2 - 7c_3 &= \frac{1}{4} \\ 9c_3 + 7c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{131}$$

Cuya solución es:

$$c_1 = \frac{1}{12},\ \ c_2 = \frac{9}{520},\ \ c_3 = -\frac{7}{520} \tag{132}$$

Con lo cual se ha resuelto la solución particular de la ecuación:

$$\boxed{y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{12} + \frac{9}{520}\cos(2x) - \frac{7}{520}\sin(2x)\right)} \tag{133}$$

Y la solución general es simplemente:

$$y = y_p + y_h \tag{134}$$

Ayudantia 4

Pablo Marchant Campos

Lunes 14 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Variación de Parametros

1.1.1. Ecuaciones lineales de órden 2

Considero una ecuación diferencial lineal de órden 2, no homogenea de coeficientes variables:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x), \quad a_2 \neq 0 \tag{1}$$

La ecuación homogenea asociada es:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{2}$$

Si tengo dos soluciones LI y_1 e y_2 de la ecuación homogenea, entonces busco soluciones particulares de la ecuación no homogenea de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3}$$

Donde u_1 y u_2 son funciones de x que pretendo resolver. Reemplazando y_p en la ecuación diferencial no homogenea obtengo:

$$\begin{aligned} &a_2(u_1y_1'' + u_2y_2'') + a_2(u_1'y_1' + u_2'y_2') \\ &\quad + a_2(u_1'y_1 + u_2'y_2)' + a_1(u_1y_1' + u_2y_2') \\ &\quad + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a_0(u_1y_1 + u_2y_2) = Q(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Esto se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} &u_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + u_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) \\ &\quad + a_2(u_1'y_1' + u_2'y_2') + a_2(u_1'y_1 + u_2'y_2)' \\ &\quad + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) = Q(x) \end{aligned} \tag{5}$$

Como y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogenea, esto se reduce a:

$$\begin{aligned} &a_2(u_1'y_1' + u_2'y_2') + a_2(u_1'y_1 + u_2'y_2)' \\ &\qquad + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) = Q(x) \end{aligned} \tag{6}$$

De lo cual se ve inmediatamente que basta con que u_1' y u_2' cumplan que:

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= \frac{Q(x)}{a_2} \end{aligned} \tag{7}$$

Este es un sistema algebráico para u_1' y u_2' que se puede resolver inmediatamente usando la regla de Cramer:[1]

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x)/a_2 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x)/a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \tag{8}$$

Integrando estos resultados, se obtiene u_1 y u_2, con lo cual por (3) se obtiene una solución particular al problema.

A diferencia de el método de coeficientes indeterminados, este método se puede aplicar a cualquier función $Q(x)$.

1.1.2. Ecuaciones lineales de órden superior

Este método puede extenderse a ecuaciones lineales de órden n:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = Q(x), \quad a_n \neq 0 \tag{9}$$

En este caso, considero que he resuelto n soluciones LI $y_1, \ldots, y_n$ de la ecuación homogenea asociada, y busco soluciones a la ecuación no homogenea de la forma:

$$y_p = u_1y_1 + \cdots + u_ny^n \tag{10}$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial, se puede demostrar que para que y_p sea solución, basta con que $u_1', \ldots, u_n'$ sean solucion del sistema algebráico:

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0 \\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} &= Q(x)/a_n \end{aligned} \tag{11}$$

[1] Como y_1 e y_2 son LI, se tiene que su Wronskiano es distinto de cero:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto asegura que (7) tiene solución, y además que esta es única

1.2. Reducción de Orden

Considero la ecuación diferencial:

$$f_2 y'' + f_1 y' + f_0 y = Q(x) \tag{12}$$

Si y_1 es una solución de la ecuación diferencial homogenea, entonces busco soluciones de la ecuación no homogenea de la forma:

$$y_p(x) = y_1(x)u(x) \tag{13}$$

Reemplazando y_p en la ecuación diferencial obtengo:

$$\begin{aligned} f_2[y_1u'' + &2y_1'u' + y_1''u] \\ &+ f_1[y_1u' + y_1'u] + f_0y_1u = Q(x) \end{aligned} \tag{14}$$

Esto se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} u[f_2y_1'' &+ f_1y_1' + f_0y_1] \\ &+ f_2y_1u'' + [2f_2y_1' + f_1y_1]u' = Q(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Como y_1 es solución particular de la ecuación homogenea asociada, esto se reduce a:

$$f_2y_1u'' + [2f_2y_1' + f_1y_1]u' = Q(x) \tag{16}$$

Esta es una ecuacíon diferencial lineal de primer orden para u' que puede resolverse facilmente. Como esta ecuación es de segundo orden para u, su solución tendrá dos constantes arbitrarias, y al reemplazar en (13), se obtendrá una solución a la ecuación diferencial con dos constantes arbitrarias que será la solución general al problema.

1.3. Ecuación de Cauchy-Euler

Una ecuación diferencial de Cauchy-Euler de orden n es de la forma:

$$\begin{aligned} a_nx^ny^{(n)}(x) &+ a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) \\ &+ \cdots + a_1xy'(x) + a_0y(x) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Para resolver ecuaciones de este tipo, se tienen dos métodos posibles:

- Realizar la sustitución $x = e^u$. Esto transforma la ecuación diferencial en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
- Buscar soluciones de la forma $y_p = x^m$. Reemplazando soluciones de este tipo en la ecuación diferencial, se obtiene una ecuación algebraica para m. Sin embargo, no siempre es posible mediante este método solamente encontrar n soluciones LI a la ecuación diferencial.

1.4. Oscilador harmónico

En el caso de un oscilador harmónico sujeto a una fuerza de roce proporcional a su velocidad, su ecuación de movimiento (para oscilaciones unidimensionales) es:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma, \omega_0 > 0 \tag{18}$$

Reemplazando $x = e^{\omega t}$ en la ecuación y resolviendo ω se tiene:

$$\omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \tag{19}$$

$$\omega_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{20}$$

Distingo 3 casos:

- Si $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ (caso sobreamortiguado) se tendrá:

$$\boxed{x = c_1e^{\omega_+ t} + c_2e^{\omega_- t}} \tag{21}$$

- Si $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ (caso criticamente amortiguado) se tendrá $\omega_+ = \omega_-$:

$$\boxed{x = (c_1 + c_2t)e^{\omega_+ t}} \tag{22}$$

- Y si $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ (caso amortiguado) se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} x = c_1e^{-\gamma t}&\cos(t \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}) \\ +c_2e^{-\gamma t}&\sin(t \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}) \end{aligned}} \tag{23}$$

2. Problemas

2.1.

Resuelva las siguientes ecuaciónes diferenciales mediante el método de variación de parámetros:

a) $y'' + y = \csc(x)$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$

2.2.

Obtenga la solución general de la siguiente ecuacion diferencial en la cuales se entrega una solución y_1 del sistema homogeneo asociado:

$$y'' - 2y'/x + 2y/x^2 = x\ln(x), \quad y_1 = x$$

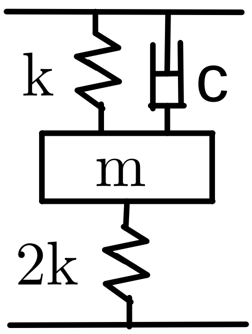
2.3.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' + 3xy' + y = x$$

2.4.

Considere el siguiente sistema formado por una masa, dos resortes, y un amortiguador que ejerce una fuerza proporcional a la velocidad:



Resuelva la ecuación de movimiento para oscilaciones verticales de este sistema, considerando que existe un punto en el cual ambos resortes están en su largo natural.

2.5.

Un resorde de largo l (en reposo) y constante de restauración $k = 1$ está empotrado en la base de un tubo de acero que esta lleno de un líquido viscoso que induce un roce proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = \sqrt{2}$. En el extremo superior del resorte se pega una bola de masa $m = 1$ y luego se comprime hasta la mitad del largo del resorte. Considere que el resorte se encuentra posicionado horizontalmente de modo que los efectos de la gravedad son despreciables.

a) Plantear dos veces la ecuación de movimiento para el desplazamiento $x(t)$ de la masa usando dos orígenes distintos:

- El punto inicial en el que queda la masa luego de ser comprimido el resorte.
- El punto en el cual el resorte se encuentra en su largo natural.

En ambos casos considere la dirección positiva de x como aquella en la cual el resorte se estira.

b) Hallar el (primer) instante T en el cual el resorte vuelve a su largo de equilibrio.

c) Hallar la velocidad de la bola en ese instante.

2.6.

Determine para que valores de ω el problema con valor en la frontera:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(-a) = 0, y(a) = 0 \tag{24}$$

Tiene solución.

3. Soluciones

3.1.

a) Resuelvo primero la ecuación homogenea asociada:

$$(D^2 + 1)y = 0 \tag{25}$$

Su solución es:

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \tag{26}$$

De modo que puedo tomar como soluciones LI:

$$y_1 = \cos(x), \quad y_2 = \sin(x) \tag{27}$$

Por el método de variación de parametros, busco una solución de la forma:

$$y_g = u_1(x)\cos(x) + u_2(x)\sin(x) \tag{28}$$

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ deben satisfacer el sistema:

$$\begin{aligned} u_1'\cos(x) + u_2'\sin(x) &= 0 \\ -u_1'\sin(x) + u_2'\cos(x) &= \csc(x) \end{aligned} \tag{29}$$

Resuelvo para u_1':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \csc(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = -1 \tag{30}$$

Por lo tanto, tengo que:

$$u_1 = -x + A \tag{31}$$

Donde A es una constante de integración arbitraria. Resuelvo ahora para u_2':

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \csc(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \cot(x) \tag{32}$$

Por lo tanto, tengo que:

$$u_2 = \ln(\sin(x)) + B \tag{33}$$

Donde B es una constante de integración arbitraria. Con esto, la solución general al problema se obtiene reemplazando u_1 y u_2 en (28):

$$y_g = (-x + A)\cos(x) + (-\ln(\cos(x)) + B)\sin(x) \tag{34}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_g = -x\cos(x) + \ln(\sin(x))\sin(x) \\ + A\cos(x) + B\sin(x) \end{aligned}} \tag{35}$$

b) Resuelvo primero la ecuación homogenea asociada:

$$(D^2 + 2D + 1)y = 0 \tag{36}$$

$$(D + 1)^2 y = 0 \tag{37}$$

Su solución es:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \tag{38}$$

De modo que puedo tomar como soluciones LI:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x} \tag{39}$$

Por el método de variación de parametros, busco una solución de la forma:

$$y_g = u_1(x)e^{-x} + u_2(x)xe^{-x} \tag{40}$$

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ deben satisfacer el sistema:

$$\begin{aligned} u_1' e^{-x} + u_2' x e^{-x} = 0 \\ -u_1' e^{-x} + u_2'(e^{-x} - xe^{-x}) = e^{-x}/x \end{aligned} \tag{41}$$

Resuelvo para u_1':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}/x & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}} = -1 \tag{42}$$

Por lo tanto, tengo que:

$$u_1 = -x + A \tag{43}$$

Donde A es una constante de integración arbitraria. Resuelvo ahora para u_2':

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}/x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}} = \frac{1}{x} \tag{44}$$

Por lo tanto, tengo que:

$$u_2 = \ln(x) + B \tag{45}$$

Donde B es una constante de integración arbitraria. Con esto, la solución general al problema se obtiene reemplazando u_1 y u_2 en (40):

$$y_g = (-x + A)e^{-x} + (\ln(x) + B)xe^{-x} \tag{46}$$

$$y_g = -xe^{-x} + \ln(x)xe^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x} \tag{47}$$

El primer término es parte de la solución homogenea y se puede incluir en la constante B quedando finalmente:

$$\boxed{y_g = \ln(x)xe^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}} \tag{48}$$

3.2.

Dada la solución $y_1 = x$ de la ecuación homogenea, busco una solución de la ecuación no homogenea de la forma:

$$y_g = xu(x) \tag{49}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtengo:

$$(xu'' + 2u') - \frac{2}{x}(xu' + u) + \frac{2}{x}u = \quad x\ln(x) \tag{50}$$

$$xu'' = \quad x\ln(x) \tag{51}$$

$$u'' = \quad \ln(x) \tag{52}$$

Integro dos veces:

$$u' = \quad x\ln(x) - x + C_1 \tag{53}$$

$$u = \quad \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2 \tag{54}$$

Y la solución general al problema queda dada por:

$$\boxed{y_g = \frac{1}{2}x^3\ln(x) - \frac{3}{4}x^3 + C_1 x^2 + C_2 x} \tag{55}$$

3.3.

Considero dos métodos de solución:

- **Método 1:**Realizar la sustitución $x = e^u$. Tendré para y':

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}e^{-u} \tag{56}$$

Y para y'':

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}e^{-u}\right) = e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}e^{-u}\right) \tag{57}$$

$$y'' = \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,u^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}\right)e^{-2u} \tag{58}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial queda:[2]

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,u^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}\right) + 3\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} + y = e^u \tag{59}$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = (D+1)^2 y = e^u \tag{60}$$

La solución al sistema homogeneo asociado es:

$$y_h = C_1 e^{-u} + C_2 u e^{-u} \tag{61}$$

Para resolver el sistema no homogeneo utilizo coeficientes indeterminados. Noto que $(D-1)$ es aniquilador de e^u, por lo tanto, la solución particular debe satisfacer la ecuación:

$$(D+1)^2(D-1)y_p = 0 \tag{62}$$

La solución para y_p, omitiendo términos de la solución homogenea, es:

$$y_p = Ae^u \tag{63}$$

Para resolver A, reemplazo y_p en la ecuacion diferencial (60):

$$Ae^u + 2Ae^u + Ae^u = e^u, \quad A = \frac{1}{4} \tag{64}$$

De modo que la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{4}e^u \tag{65}$$

Y la solución general esta dada por:

$$y_g = C_1 e^{-u} + C_2 u e^{-u} + \frac{1}{4}e^u \tag{66}$$

Invirtiendo el cambio de variable para recuperar x obtengo:

$$\boxed{y_g = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x}\ln(x) + \frac{x}{4}} \tag{67}$$

- **Método 2:**Buscar una solución de la forma $y = x^m$ a la ecuación homogenea sociada. Asi tendré:

$$y' = mx^{m-1}, \;\; y'' = m(m-1)x^{m-2} \tag{68}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial homogenea asociada obtengo una ecuación algebráica para m:

$$m(m-1)x^m + 3mx^m + x^m = 0 \tag{69}$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0, \quad m = -1 \tag{70}$$

De lo cual obtengo una solución y_1 del sistema homogeneo asociado:

$$y_1 = \frac{1}{x} \tag{71}$$

Utilizo reducción de órden para obtener la solución general al problema. Busco una solución de la forma:

$$y_g = \frac{u(x)}{x} \tag{72}$$

Las primeras dos derivadas de y_g son:

$$\begin{aligned} y_g' &= -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x} \\ y_g'' &= 2\frac{u}{x^3} - 2\frac{u'}{x^2} + \frac{u''}{x} \end{aligned} \tag{73}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtengo:

$$u' + xu'' = x \tag{74}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(xu') = x \tag{75}$$

$$u' = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{x} \tag{76}$$

$$u = \frac{x^2}{4} + C_1\ln(x) + C_2 \tag{77}$$

De modo que la solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y_g = \frac{x}{4} + \frac{C_1\ln(x)}{x} + \frac{C_2}{x}} \tag{78}$$

Que es equivalente a la solución obtenida mediante el otro método.

[2] Utilizo aqui el operador D para denotar la operación $\mathrm{d}/\mathrm{d}\,u$

3.4.

Utilizo como origen el punto en el cual ambos resortes están en su largo natural, y mido la distancia $y(t)$ como positiva hacia arriba. La ecuación de movimiento será:

$$my'' = -3ky - cy' - mg \tag{79}$$

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{3k}{m}y - g = 0 \tag{80}$$

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{3k}{m}\left(y - \frac{mg}{3k}\right) = 0 \tag{81}$$

Realizo el cambio de variable:

$$u = y - \frac{mg}{3k} \tag{82}$$

Con lo cual la ecuación diferencial queda:

$$u'' + \frac{c}{m}u' + \frac{3k}{m}u = 0 \tag{83}$$

Ahora tomo:

$$\frac{c}{m} = 2\gamma, \quad \frac{3k}{m} = \omega_0^2 \tag{84}$$

Con lo cual la ecuación diferencial queda de la forma estandar descrita en 1.4:

$$u'' + 2\gamma u' + \omega_0^2 u = 0 \tag{85}$$

Y se soluciona por el mismo método descrito previamente.

3.5.

a)
- El punto inicial en el que queda la masa luego de ser comprimido el resorte. La ecuación diferencial en este caso es:

$$\boxed{\begin{aligned} x'' + \sqrt{2}x' + (x - l/2) = 0,\\ x(0) = 0, \;\; x'(0) = 0\end{aligned}} \tag{86}$$

- El punto en el cual el resorte se encuentra en su largo natural. La ecuación diferencial en este caso es:

$$\boxed{\begin{aligned} x'' + \sqrt{2}x' + x = 0,\\ x(0) = -l/2, \;\; x'(0) = 0\end{aligned}} \tag{87}$$

b) Utilizo la ecuación que describe $x(t)$ usando como orígen el punto en el cual el resorte está en su largo natural:

$$x'' + \sqrt{2}x' + x = 0, \quad x(0) = -l/2, \;\; x'(0) = 0 \tag{88}$$

El polinomio característico asociado es:

$$\lambda^2 + \sqrt{\lambda} + 1 = 0 \tag{89}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \tag{90}$$

De modo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = e^{-\sqrt{2}t/2}\left(C_1\cos(\sqrt{2}t/2) + C_2\sin(\sqrt{2}t/2)\right) \tag{91}$$

Aplicando condiciones iniciales obtengo que:

$$C_1 = C_2 = -l/2 \tag{92}$$

De modo que la solución particular es:

$$x(t) = -\frac{l}{2}e^{-\sqrt{2}t/2}\left(\cos(\sqrt{2}t/2) + \sin(\sqrt{2}t/2)\right) \tag{93}$$

Busco el primer valor positivo de t para el cual el resorte vuelve a su largo natural, o sea, $x(t) = 0$:

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = -1 \tag{94}$$

Por lo tanto, si T denota el instante buscado, tengo que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}T = \frac{3\pi}{4} \tag{95}$$

$$\boxed{T = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} \sim 3,32} \tag{96}$$

c) Derivando $x(t)$ obtengo la velocidad de la bola:

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}le^{-\sqrt{2}t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \tag{97}$$

Evaluando en $t = T$ obtengo la velocidad requerida:

$$\boxed{x'(T) = \frac{l}{2}e^{-3\pi/4}} \tag{98}$$

3.6.

Las soluciones a la ecuación diferencial son de la forma:

$$y = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \tag{99}$$

Reescribo esto en base a otras constantes arbitrarias A y δ tal que:

$$C_1 = A\cos(\omega\delta), \quad C_2 = -A\sin(\omega\delta) \tag{100}$$

Reemplazando esto en (99) queda:

$$y = A\cos(\omega x)\cos(\omega\delta) - A\sin(\omega x)\sin(\omega\delta) \quad (101)$$
$$y = A\cos(\omega(x-\delta)) \quad (102)$$

Aplico ahora la condición inicial en $x = -a$:

$$y(-a) = A\cos(\omega(-a-\delta)) = 0 \quad (103)$$
$$\rightarrow \omega(-a-\delta) = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (104)$$

De igual forma, aplico la condición en $x = a$:

$$y(a) = A\cos(\omega(a-\delta)) = 0 \quad (105)$$
$$\rightarrow \omega(a-\delta) = m\pi + \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (106)$$

Restando a la expresión (106) la expresión (104) obtengo:

$$2\omega a = (m-n)\pi \quad (107)$$
$$\omega = \frac{(m-n)\pi}{2a} \quad (108)$$

Como $(m-n)$ puede ser cualquier número entero, tengo que los valores permitidos para ω son:

$$\boxed{\omega = \frac{k\pi}{2a}, \quad k \in \mathbb{Z}} \quad (109)$$

4. Mas Problemas

4.1.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el método de variación de parámetros:

a) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(x)$

b) $y'' + y = 4x\sin x$

Solución:

a) La solución de la ecuación homogenea se resuelve facilmente como:

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x} \quad (110)$$

Ocupando el método de variación de parámetros, se busca una solución particular de la forma:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad (111)$$

Donde u_1 y u_2 son funciones por determinar, e $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$. Las funciones u_1, u_2 deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= e^{-x}\ln(x) \end{aligned} \quad (112)$$

Reemplazando los valores de los y se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1' e^{-x} + u_2' x e^{-x} &= 0 \\ -u_1' e^{-x} + u_2'(e^{-x} - xe^{-x}) &= e^{-x}\ln(x) \end{aligned} \quad (113)$$

Se resuelve el valor de u_1':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln(x) & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}} \quad (114)$$
$$= -x\ln(x) \quad (115)$$

De igual forma para u_2':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix}} \quad (116)$$
$$= \ln(x) \quad (117)$$

Los valores de u_1 y u_2 son entonces:

$$u_1 = -\frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) \quad (118)$$
$$u_2 = x\ln(x) - x \quad (119)$$

Reemplazando estos valores en y_p se obtiene:

$$-\frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1)e^{-x} + (x\ln(x) - x)xe^{-x} \quad (120)$$
$$y_p = \frac{x^2}{4}e^{-x}(2\ln(x) - 3) \quad (121)$$

Que sumada a la solución homogenea constituye la solución general de la ecuación diferencial.

b) La solución de la ecuación homogenea asociada es:

$$y_h = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \quad (122)$$

Ocupando el método de variación de parámetros, se busca una solución particular de la forma:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad (123)$$

Donde u_1 y u_2 son funciones por determinar, e $y_1 = \cos(x),\ y_2 = \sin(x)$. Las funciones u_1, u_2 deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= 4x\sin x \end{aligned} \tag{124}$$

Reemplazando los valores de los y se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1'\cos(x) + u_2'\sin(x) &= 0 \\ -u_1'\sin(x) + u_2'\cos(x) &= 4x\sin x \end{aligned} \tag{125}$$

Se resuelve el valor de u_1':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ 4x\sin x & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} \tag{126}$$

$$= -4x\sin^2(x) \tag{127}$$

De igual forma para u_2':

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & 4x\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} \tag{128}$$

$$= 4x\sin(x)\cos(x) \tag{129}$$

Los valores de u_1 y u_2 son entonces:

$$u_1 = 4x\left(\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) - \frac{x}{2}\right) - \sin^2(x) + x^2 \tag{130}$$

$$u_2 = 2x\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) - x \tag{131}$$

Reemplazando estos valores en y_p se obtiene:

$$y_p = x\sin(x) - x^2\cos(x) \tag{132}$$

Que sumada a la solución homogenea constituye la solución general de la ecuación diferencial.

4.2.

Una masa m cuelga de un resorte bajo la acción de la gravedad. Determine el periodo de las oscilaciones del sistema.

Solución: Considero como coordenada para describir la posición del bloque, su desplazamiento con respecto a la posición inicial en la cual los resortes están en su largo natural, tomando la dirección positiva hacia abajo.

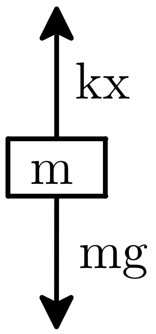


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre para la masa del (problema 4.2)

Para hacer el análisis de fuerzas, considero el diagrama de cuerpo libre de la figura 1.

La ecuación de movimiento es:

$$mx'' = mg - kx \tag{133}$$

$$mx'' = -2k\left(x - \frac{mg}{2k}\right) \tag{134}$$

Ahora realizo el cambio de variable:

$$x - \frac{mg}{2k} = y \qquad x'' = y'' \tag{135}$$

Este cambio de variables corresponde a tomar el desplazamiento desde el punto de equilibrio del sistema. Con él, la ecuación (134) queda:

$$my'' = -2ky \tag{136}$$

$$y'' = -w^2y, \qquad w^2 = \frac{2k}{m} \tag{137}$$

Escribo la ecuación como:

$$(D^2 + w^2)y = 0 \tag{138}$$

De modo que la solución general es:

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{139}$$

Para las condiciones iniciales, tengo $y'(0) = 0$, e $y(0)$ lo obtengo del cambio de variables, recordando que $x_0 = 0$:

$$y(0) = -\frac{mg}{2k} \tag{140}$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general, obtengo la solución particular a este problema:

$$\boxed{y(t) = -\frac{mg}{2k}\cos(\omega t)} \tag{141}$$

Y el cuerpo describirá un movimiento oscilatorio en torno al punto de equilibrio del sistema. De la trayectoria se deduce inmediatamente la amplitud del movimiento:

$$\boxed{A = \frac{mg}{2k}} \tag{142}$$

El periódo tambien se resuelve facilmente:

$$\boxed{T = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}} \tag{143}$$

4.3.

Un cilindro de radio r y masa M se encuentra parcialmente sumergido en agua de manera vertical. Considerando que el agua tiene un coeficiente de roce b con el cilindro, proporcional a la velocidad de este, y dadas la aceleración de gravedad g y la densidad del agua ρ, resuelva la ecuación de movimiento del cilindro. Considere que el cilindro solo se mueve verticalmente.

Solución: Se considera como coordenada para describir la posición del cilindro la distancia y del mismo que se encuentra sumergida. El agua ejercera una fuerza de empuje sobre el cilindro dada por:

$$F_e = -g\rho\pi r^2 y \tag{144}$$

El roce entre el cilindro y el agua será:

$$F_r = -by' \tag{145}$$

Y el peso del cilindro es:

$$F_p = Mg \tag{146}$$

La fuerza neta actuando sobre el cilindro es:

$$F_n = My'' = -g\rho\pi r^2 y - by' + Mg \tag{147}$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$y'' + 2\gamma y' + w_0^2\left(y - \frac{g}{\omega_0^2}\right) = 0 \tag{148}$$

Donde se tiene:

$$\gamma = \frac{b}{2M}, \ \ \omega_0^2 = \frac{g\rho\pi r^2}{M} \tag{149}$$

El cambio de variable $x = y - \frac{g}{\omega_0^2}$ entrega una ecuación homogenea:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0 \tag{150}$$

Esta es la ecuación de un oscilador harmónico descrita en 1.4. Sus soluciones son:

- Si $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ (caso sobreamortiguado) se tendrá:

$$\boxed{x = c_1 e^{\omega_+ t} + c_2 e^{\omega_- t}} \tag{151}$$

- Si $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ (caso criticamente amortiguado) se tendrá $\omega_+ = \omega_-$:

$$\boxed{x = (c_1 + c_2 t)e^{\omega_+ t}} \tag{152}$$

- Y si $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ (caso amortiguado) se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} x = c_1 e^{-\gamma t}\cos(t \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}) \\ + c_2 e^{-\gamma t}\sin(t \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}) \end{aligned}} \tag{153}$$

Ayudantia 5

Pablo Marchant Campos

Lunes 21 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Resolución de sistemas homogeneos diagonalizables, primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales homogeneo de $n \times n$ se puede escribir como:

$$\vec{x}\,' = \frac{\mathrm{d}\,\vec{x}}{\mathrm{d}\,t} = A\vec{x}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{M}_{n\times n} \tag{1}$$

Donde la matriz A es diagonalizable, y sus coeficientes son constantes. En este caso, tengo que se puede formar una matriz invertible V cuyas columnas son vectores propios de A, y una matriz diagonal D cuyos elementos son valores propios de A tal que:

$$A = VDV^{-1} \tag{2}$$

Donde las matrices estarán dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \dots \vec{v_n} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Y los vectores propios $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son LI y los $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz.

Usando esto, la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\vec{x}\,' = VDV^{-1}\vec{x} \tag{4}$$

Realizo el cambio de variable:

$$\vec{x} = V\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Y asi obtengo el sistema de ecuaciones:

$$V\vec{u}\,' = VD\vec{u} \tag{6}$$

$$\boxed{\vec{u}\,' = D\vec{u}} \tag{7}$$

Este sistema en realidad son ecuaciones n ecuaciones diferenciales desacopladas. Se puede ver facilmente que su solución es:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Con $C_1, \dots, C_n$ constantes arbitrarias. Para resolver el producto $V\vec{u}$, simplemente recuerdo que el producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de sus columnas, por lo cual la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\vec{x}(t) = Vu(t) = C_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t} \tag{9}$$

1.2. Resolución de sistemas no homogeneos diagonalizables, primer orden

El mismo procedimiento se puede aplicar para un sistema no homogeneo diagonalizable. Aqui tengo la siguiente ecuación diferencial, donde el término no homogeneo es $\vec{b}(t)$:

$$\vec{x}\,' = \frac{\mathrm{d}\,\vec{x}}{\mathrm{d}\,t} = A\vec{x} + \vec{b}(t), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{M}_{n\times n} \tag{10}$$

Diagonalizando la matriz al igual que en el caso homogeneo obtengo:

$$\vec{x}\,' = VDV^{-1}\vec{x} + \vec{b}(t) \tag{11}$$

Realizo el cambio de variable:

$$\vec{x} = V\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Y asi obtengo el sistema de ecuaciones:

$$V\vec{u}\,' = VD\vec{u} + \vec{b}(t) \tag{13}$$

$$\boxed{\vec{u}\,' = D\vec{u} + V^{-1}\vec{b}(t)} \tag{14}$$

Este sistema, al igual que en el caso homogeneo, es en realidad n ecuaciones diferenciales desacopladas para los elementos de $\vec{u}$. Resolviendolas, la solución general se obtiene simplemente calculando $\vec{x} = V\vec{u}$.

1.3. Ecuaciones de órden superior

El mismo procedimiento se puede aplicar a una ecuación diferencial de orden superior:

$$\frac{\mathrm{d}^n \vec{x}}{\mathrm{d}\, t^n} = A\vec{x} + \vec{b}(t), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{M}_{n\times n} \tag{15}$$

Repitiendo el proceso usado en los casos anteriores, se obtiene el sistema desacoplado:

$$\boxed{\vec{u}^{(n)} = D\vec{u} + V^{-1}\vec{b}(t)} \tag{16}$$

Una ves resueltas las n ecuaciones diferenciales desacopladas, se obtiene la solución como $\vec{x} = V\vec{u}$.

2. Problemas

2.1.

Resuelva el sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.

Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} x$$

2.3.

Obtenga una solución particular para el siguiente sistema:

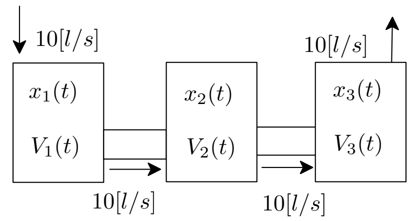
$$x' = 4x + y + e^t$$

$$y' = 6x - y - e^t$$

Que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$.

2.4.

Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogenea de sal con agua. Denote por x_i, V_i la cantidad de sal y el volumen de agua de cada tanque respectivamente. Al primer tanque entran $10[l/s]$ de agua fresca, este bota $10[l/2s]$ al segundo tanque, este otro bota $10[l/s]$ al tercero, y se extraen $10[l/s]$ de este último.



Si las condiciones iniciales son:

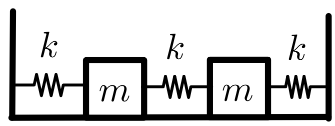
$$\begin{gathered} V_1(0) = 30[l], \;\; V_2(0) = 60[l], \;\; V_3(0) = 30[l] \\ x_1(0) = 400[g], \;\; x_2(0) = 200[g], \;\; x_3(0) = 100[g] \end{gathered} \tag{17}$$

Resuelva la concentracion de sal en el tercer tanque pasados 5 minutos.

resuelva la concentración del segundo tanque en el momento que el tercero se vacia.

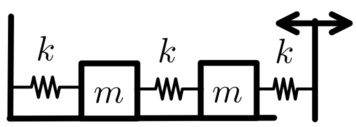
2.5.

Obtenga la solución general de las ecuaciones de movimiento para los dos cuerpos de la figura:



2.6.

Resuelva las ecuaciones de movimiento para el mismo sistema de dos masas unidas por resortes, pero considere que la pared de la derecha tiene un desplazamiento de la posición inicial dado por $A\cos(\omega t)$:



3. Soluciones

3.1.

Obtengo primero los valores propios de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 \tag{19}$$

$$\lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 1-i \tag{20}$$

Como se tienen dos valores propios complejos, basta resolver el vector propio asociado a uno de ellos, y el otro vector propio será simplemente su conjugado. Resuelvo entonces v_1, vector propio de λ_1:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad F_2 \to F_2 - iF_1 \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

Tomando $b=1$ se obtiene entonces el vector propio:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Y el vector propio v_2 será simplemente su conjugado:

$$v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Por lo cual la matriz se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = VDV^{-1} \tag{25}$$

Donde las matrices V y D están dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \tag{27}$$

Aplicando entonces el cambio de variable $x = Vy$ el sistema se desacopla:

$$y' = Dy \tag{28}$$

La solución para y se obtiene de forma inmediata:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} c_1(\cos(t) + i\sin(t)) \\ c_2(\cos(t) - i\sin(t)) \end{pmatrix} \tag{29}$$

Multiplicando por V por la izquierda obtengo x:

$$\begin{aligned} x = c_1 e^t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(t) + i\sin(t)) + \\ c_2 e^t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(t) - i\sin(t)) \end{aligned} \tag{30}$$

$$= e^t(c_1 + c_2)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + e^t i(c_1 - c_2)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \tag{31}$$

Como c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, esta solución es equivalente a:

$$\boxed{x = e^t A \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + e^t B \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}} \tag{32}$$

3.2.

Resuelvo primero el polinomio característico de la matriz para obtener sus valores propios:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \tag{34}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \tag{35}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1} \tag{36}$$

Resuelvo ahora los vectores propios asociados a cada valor propio escalonando la matriz:[1]

- $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} F_2 \to 2F_2 \\ F_3 \to 2F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad F_3 \to F_3 - 3F_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

[1] Las operaciones realizadas sobre cada fila del sistema se representan por operaciones tales como $F_1 \to F_1 - F_2$ que quiere decir que la fila 1 se reemplaza por el resultado de restar la fila 2 a la fila 1

De lo cual se ve que tomando $c = 1$ obtengo el vector propio:

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{37}$$

- $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

De lo cual se pueden obtener dos vectores propios. Primero, tomando $b = 1$, $c = 0$ obtengo:

$$\boxed{v_{2a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{38}$$

Luego, si tomo $b = 0$, $c = 1$ obtengo el otro vector propio:

$$\boxed{v_{2b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{39}$$

Con esto, puedo diagonalizar la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = VDV^{-1} \tag{40}$$

Donde V y D están dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable:

$$x = Vy \tag{43}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales se desacopla:

$$Vy' = VDy \tag{44}$$

$$y' = Dy \tag{45}$$

Obteniendose asi para las componentes de y:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2t} \\ y_2 &= C_2 e^{t} \\ y_3 &= C_3 e^{t} \end{aligned}} \tag{47}$$

Utilizando (43) se obtiene la solución general en x:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t - C_3 e^t \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^t \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^t \end{pmatrix}} \tag{48}$$

3.3.

El sistema se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \tag{49}$$

Para la matriz cuadrada se determinan los valores y vectores propios para diagonalizarla. Obtengo el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{50}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \tag{51}$$

$$\boxed{\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 5} \tag{52}$$

Determino ahora los valores propios para cada valor propio:

- $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{53}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{54}$$

De lo cual, tomando $a = 1$ obtengo el vector propio que busco:

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}} \tag{55}$$

- $\lambda_1 = 5$:

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{56}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{57}$$

De lo cual, tomando $a=1$ obtengo el vector propio que busco:

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \tag{58}$$

Con este resultado puedo diagonalizar la matriz:

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\6 & -1\end{pmatrix} = VDV^{-1} \tag{59}$$

Donde las matrices V y D están dadas por:

$$V = \begin{pmatrix}1 & 1\\-6 & 1\end{pmatrix} \tag{60}$$

$$D = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 5\end{pmatrix} \tag{61}$$

Con esto el sistema se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = VDV^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix} \tag{62}$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \tag{63}$$

El sistema se puede desacoplar:

$$V\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix} = VD\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + V^{-1}\begin{pmatrix}e^t\\-e^t\end{pmatrix} \tag{65}$$

Resuelvo V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{\begin{pmatrix}1 & -1\\6 & 1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\-6 & 1\end{vmatrix}} \tag{66}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix}1/7 & -1/7\\6/7 & 1/7\end{pmatrix} \tag{67}$$

Con lo cual el sistema queda:

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2u\\5v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2e^t/7\\5e^t/7\end{pmatrix} \tag{68}$$

$$\boxed{\begin{aligned}u' &= -2u + 2e^t/7\\ v' &= 5v + 5e^t/7\end{aligned}} \tag{69}$$

Resuelvo ambas ecuaciones por separado:

- La ecuación para u se puede escribir como:

$$u' + 2u = 2e^t/7 \tag{70}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\int 2\,\mathrm{d}t}$ obtengo:

$$\left(ue^{2t}\right)' = 2e^{3t}/7 \qquad / \int ()\,\mathrm{d}t \tag{71}$$

$$ue^{2t} = 2e^{3t}/21 + C_1 \tag{72}$$

$$\boxed{u = 2e^t/21 + C_1e^{-2t}} \tag{73}$$

- La ecuación para v se puede escribir como:

$$v' - 5v = 5e^t/7 \tag{74}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\int -5\,\mathrm{d}t}$ obtengo:

$$\left(ve^{-5t}\right)' = 5e^{-4t}/7 \qquad / \int ()\,\mathrm{d}t \tag{75}$$

$$ve^{-5t} = -5e^{-4t}/28 + C_2 \tag{76}$$

$$\boxed{v = -5e^t/28 + C_2e^{5t}} \tag{77}$$

Ahora, recordando la ecuación (63) se puede obtener la solución en x e y:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \tag{78}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u+v\\-6u+v\end{pmatrix} \tag{79}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^t/12 + C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}\\-3e^t/4 - 6C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}\end{pmatrix}} \tag{80}$$

Aplicando las condiciones iniciales obtengo un sistema para las constantes:

$$\begin{pmatrix}1/12\\3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+C_1 + C_2\\-6C_1 + C_2\end{pmatrix} \tag{81}$$

Resuelvo para C_1

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix}1/12 & 1\\3/4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\-6 & 1\end{vmatrix}} \tag{82}$$

$$C_1 = \frac{-2/3}{7} = -\frac{2}{21} \tag{83}$$

De igual modo para C_2:

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/12 \\ -6 & 3/4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}} \tag{84}$$

$$C_2 = \frac{5/4}{7} = \frac{5}{28} \tag{85}$$

Con lo cual la solución particular del sistema es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t/12 - 2e^{-2t}/21 + 5e^{5t}/28 \\ -3e^t/4 + 12e^{-2t}/21 + 5e^{5t}/28 \end{pmatrix}} \tag{86}$$

3.4.

De modo que el sistema de ecuaciones para la cantidad de sal $x(t)$ es:

$$\begin{aligned} x_1' &= -\frac{x_1}{3} \\ x_2' &= \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{6} \\ x_3' &= \frac{x_2}{6} - \frac{x_3}{3} \end{aligned} \tag{87}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales homogeneo, y de coeficientes constantes. Sin embargo, esta parcialmente desacoplado de modo que se puede resolver x_1, x_2 y x_3 en sucesión. Resuelvo primero x_1 mediante el método de variables separables:

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{x_1} = -\frac{\mathrm{d}\,t}{3} \tag{88}$$

$$\ln(x_1) = -\frac{1}{3}t + C_1 \tag{89}$$

$$\boxed{x_1 = A_1 e^{-t/3}} \tag{90}$$

Reemplazo en la ecuación diferencial para x_2':

$$x_2' = A_1 \frac{e^{-t/3}}{3} - \frac{x_2}{6} \tag{91}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de orden 1 para x_2. Resuelvo:

$$x_2' + \frac{x_2}{6} = A_1 \frac{e^{-t/3}}{3} \tag{92}$$

$$e^{t/6} x_2' + \frac{e^{t/6} x}{6} = A_1 \frac{e^{-t/6}}{3} \tag{93}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(e^{t/6} x_2) = A_1 \frac{e^{-t/6}}{3} \tag{94}$$

$$e^{t/6} x_2 = -2A_1 e^{-t/6} + A_2 \tag{95}$$

$$\boxed{x_2 = -2A_1 e^{-t/3} + A_2 e^{-t/6}} \tag{96}$$

Reemplazo en la ecuación diferencial para x_3':

$$x_3' = -\frac{A_1}{3} e^{-t/3} + \frac{A_2}{6} e^{-t/6} - \frac{x_3}{3} \tag{97}$$

Que es una ecuación diferencial lineal de orden 1 para x_3. Resuelvo:

$$x_3' + \frac{x_3}{3} = -\frac{A_1}{3} e^{-t/3} + \frac{A_2}{6} e^{-t/6} \tag{98}$$

$$e^{t/3} x_3' + \frac{e^{t/3} x_3}{3} = -\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} e^{t/6} \tag{99}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(e^{t/3} x_3) = -\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} e^{t/6} \tag{100}$$

$$e^{t/3} x_3 = -\frac{A_1 t}{3} + A_2 e^{t/6} + A_3 \tag{101}$$

$$\boxed{x_3 = -\frac{A_1 t e^{-t/3}}{3} + A_2 e^{-t/6} + A_3 e^{-t/3}} \tag{102}$$

Aplico condiciones iniciales con lo cual obtengo el sistema algebraico:

$$\begin{aligned} 400 &= A_1 \\ 200 &= -2A_1 + A_2 \\ 100 &= A_2 + A_3 \end{aligned} \tag{103}$$

$$A_1 = 400, \quad A_2 = 1000, \quad A_3 = -900 \tag{104}$$

De modo que:

$$x_3 = -\frac{400 t e^{-t/3}}{3} + 1000 e^{-t/6} - 900 e^{-t/3} \tag{105}$$

La concentración la obtengo dividiendo por 60, el volumen de líquido del tercer tanque:

$$\boxed{c_3 = -\frac{20 t e^{-t/3}}{9} + \frac{50}{3} e^{-t/6} - 15 e^{-t/3}} \tag{106}$$

Y el resultado pedido lo obtengo evaluando $c_3(300)$:

$$c_3 = 3{,}21 \times 10^{-21} \tag{107}$$

3.5.

Las ecuaciones de movimiento considerando el desplazamiento horizontal de cada cuerpo a la derecha desde la posición de equilibrio son:

$$m x_1'' = -2k x_1 + k x_2 \tag{108}$$

$$m x_2'' = k x_1 - 2k x_2 \tag{109}$$

Que en notación de matrices se puede escribir como:

$$m\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \tag{110}$$

Considero la matriz cuadrada a la cual llamare A, o sea:

$$A=\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix} \tag{111}$$

Determino los valores propios de esta matriz:

$$\begin{vmatrix}-2k-\lambda & k\\ k & -2k-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{112}$$

$$(2k+\lambda^2)-k^2=0 \tag{113}$$

$$3k^2+4k\lambda+\lambda^2=0 \tag{114}$$

$$\lambda=\frac{-4k\pm\sqrt{16k^2-12k^2}}{2} \tag{115}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1&=-k\\ \lambda_2&=-3k\end{aligned}} \tag{116}$$

Luego, se resuelven los vectores propios:

$$\begin{pmatrix}-k & k\\ k & -k\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \tag{117}$$

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} \tag{118}$$

Eligiendo $a=1$ obtengo el vector propio:

$$\boxed{\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \tag{119}$$

De igual manera se obtiene v_2:

$$\begin{pmatrix}k & k\\ k & k\end{pmatrix}\vec{v}_2=\vec{0} \tag{120}$$

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix} \tag{121}$$

Eligiendo $a=1$ obtengo el vector propio:

$$\boxed{\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \tag{122}$$

Con estos resultados, podemos diagonalizar A:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=V^{-1}AV \tag{123}$$

$$D=\begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix}=VAV^{-1} \tag{124}$$

Donde las columnas de la matriz V son los vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente:

$$V=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \tag{125}$$

De este modo la ecuación diferencial se puede escribir como:[2]

$$mx''=VDV^{-1}x \tag{126}$$

Haciendo el cambio de variable $x=Vy$ se obtiene:

$$mVy''=VDy \tag{127}$$

$$my''=Dy \tag{128}$$

Con lo cual se ha desacoplado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$my_1''=-ky_1my_2''=-3ky_2 \tag{129}$$

Cuya solución general es:

$$\boxed{\begin{aligned}y_1&=A\cos(\sqrt{k/m}t)+B\sin(\sqrt{k/m}t)\\ y_2&=C\cos(\sqrt{3k/m}t)+D\sin(\sqrt{3k/m}t)\end{aligned}} \tag{130}$$

Ahora, se obtiene la solución para los x (que son los valores de interés), recordando que el cambio de variables hecho antes fue:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \tag{131}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1&=y_1+y_2\\ x_2&=y_1-y_2\end{aligned}} \tag{132}$$

Que es la solución general del sistema. En un problema de valores iniciales, las cuatro constantes se determinan de cuatro ecuaciones, que estan dadas por las posiciones y velocidades iniciales de cada uno de los cuerpos.

3.6.

Primero, se escriben las ecuaciones de movimiento:

$$mx_1''=-2kx_1+kx_2 \tag{133}$$

$$mx_2''=kx_1-2kx_2+kA\cos(\omega t) \tag{134}$$

[2] A partir de aca, para simplificar la notación, se escribiran los vectores $\vec{x}$ simplemente como x, siempre y cuando esto no genere ambiguedades

Se nota que el sistema es similar al del ejercicio anterior, pero tiene un termino mas que hace que la ecuación no sea homogenea:

$$mx'' = Ax + b(t) \tag{135}$$

Donde el vector b esta dado por:

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ kA\cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{136}$$

Utilizando la diagonalización de A realizada antes, y haciendo el cambio de variable $x = Vy$ la ecuación se reescribe como:

$$mVy'' = VDy + b(t) \tag{137}$$
$$my'' = Dy + V^{-1}b(t) \tag{138}$$

Este sistema consiste de dos ecuaciones descopladas. Para determinarlas resolvemos $V^{-1}b(t)$:

$$V^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{|V|} \tag{139}$$
$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{140}$$
$$\Rightarrow V^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} kA\cos(\omega t)/2 \\ -kA\cos(\omega t)/2 \end{pmatrix} \tag{141}$$

Y el sistema de ecuaciones desacoplado es:

$$\begin{aligned} my_1'' + ky_1 &= kA\cos(\omega t)/2 \\ my_2'' + 3ky_2 &= -kA\cos(\omega t)/2 \end{aligned} \tag{142}$$
$$\begin{aligned} y_1'' + (k/m)y_1 &= kA\cos(\omega t)/2m \\ y_2'' + (3k/m)y_2 &= -kA\cos(\omega t)/2m \end{aligned} \tag{143}$$

Usando notación de operadores, y colocando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la ecuación se puede reescribir como:

$$\boxed{\begin{aligned} (D^2 + \omega_0^2)y_1 &= \omega_0^2 kA\cos(\omega t)/2 \\ (D^2 + 3\omega_0^2)y_2 &= -\omega_0^2 kA\cos(\omega t)/2 \end{aligned}} \tag{144}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver usando el método de *Coeficientes Indeterminados*. El aniquilador del lado derecho de ambas ecuaciones es $(D^2 - \omega^2)$. Teniendo esto, se procede a resolver ambas ecuaciones por separado. Partimos con y_1:

$$(D^2 + \omega_0^2)(D^2 - \omega^2)y_1 = 0 \tag{145}$$

La solución de la ecuación homogenea es:

$$y_{1h} = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{146}$$

A partir de este punto se deben considerar dos casos para determinar la solución particular.

Caso a Si $\omega_0 \neq \omega$ la solución particular es:

$$y_{1pa} = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \tag{147}$$
$$y_{1pa}' = -c_1\omega\sin(\omega t) + c_2\omega\cos(\omega t) \tag{148}$$
$$y_{1pa}'' = -c_1\omega^2\cos(\omega t) - c_2\omega^2\sin(\omega t) \tag{149}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial para y_1 (144) se tiene:

$$\begin{aligned} c_1\cos(\omega t)(\omega_0^2 - \omega^2) + c_2\sin(\omega t)(\omega_0^2 - \omega^2) \\ = \omega_0^2 kA\cos(\omega t)/2 \end{aligned} \tag{150}$$

Igualando coeficientes se resuelve de forma inmediata c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\omega_0^2 kA}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{151}$$

Con lo cual se tiene y_{1pa}.

Caso b Si $\omega_0 = \omega$ la solución particular es:

$$y_{1pb} = c_1 t\cos(\omega t) + c_2 t\sin(\omega t) \tag{152}$$
$$\begin{aligned} y_{1pb}' = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \\ -c_1\omega t\sin(\omega t) + c_2\omega t\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{153}$$
$$\begin{aligned} y_{1pb}'' = 2c_2\omega\cos(\omega t) - 2c_1\omega\sin(\omega t) \\ -c_1\omega^2 t\cos(\omega t) - c_2\omega^2 t\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{154}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial para y_1 (144) (y recordando que para este caso $\omega^2 - \omega_0^2 = 0$) se tiene:

$$2c_2\omega\cos(\omega t) - 2c_1\omega\sin(\omega t) = \omega^2 kA\cos(\omega t)/2 \tag{155}$$

Igualando coeficientes se resuelve de forma inmediata c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= \omega kA/4 \end{aligned} \tag{156}$$

Con lo cual se tiene y_{1pb}.

La solución particular es entonces:

$$\boxed{y_{1p} = \begin{cases} y_{1pa} & \omega \neq \omega_0 \\ y_{1pb} & \omega = \omega_0 \end{cases}} \tag{157}$$

La solución de la solución particular de y_2, y_{2p}, se deja al lector (es practicamente equivalente a la realizada).

La solución al sistema es entonces:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{h1} + y_{p1} \\ y_2 &= y_{h2} + y_{p2} \end{aligned} \tag{158}$$

Y al igual que en el ejercicio anterior, las soluciones para x_1 y x_2 se obtienen recordando que $x = Vy$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{159}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned}} \tag{160}$$

Ayudantia 6

Pablo Marchant Campos

Lunes 21 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Resolución de sistemas homogeneos no diagonalizables, primer orden

A continuación se muestra un método que permite resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, sin importar si es diagonalizable o no. Este método se reduce al método descrito en la ayudantia 5 en el caso de sistemas diagonalizables.

Considero el sistema:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \tag{1}$$

Por cada valor propio λ_i con multiplicidad algebráica m, resuelvo m *vectores propios generalizados* $\vec{v}$ LI de la ecuación:

$$(A - \lambda_i I)^m \vec{v} = 0 \tag{2}$$

Y a cada uno de estos vectores, se asocia la solución particular:

$$\boxed{\vec{x} = e^{\lambda t}\left[\vec{v} + t(A-\lambda_i I)\vec{v} + \cdots + \frac{t^m (A-\lambda_i I)^{m-1}}{(m-1)!}\vec{v}\right]} \tag{3}$$

1.2. Matrices Fundamentales

Una matriz fundamental de un sistema homogeneo de n ecuaciones es una matriz de $n \times n$ formada de modo que sus columnas son soluciones particulares linealmente independientes de esta. De este modo, si se tiene la ecuación diferencial:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \tag{4}$$

Su matriz fundamental $\Phi(t)$ satisface:

$$\Phi' = A\Phi \tag{5}$$

1.2.1. Condiciones Iniciales

Las soluciones particulares del sistema se pueden obtener de Φ mediante una combinación lineal de sus columnas. Esto quiere decir que al multiplicar Φ por la derecha por un vector constante $\vec{c}$ se obtiene una solución particular:

$$\Phi\vec{c} = \vec{x}_p \tag{6}$$

Evaluando para $t = t_0$ esta ecuación implica que:

$$\Phi(t_0)\vec{c} = \vec{x}_p(t_0) = \vec{x}_{t_0} \tag{7}$$

Como las columnas de Φ son LI, $\Phi(t_0)$ es invertible, y puedo calcular el vector $\vec{c}$ como:

$$\vec{c} = (\Phi(t_0))^{-1}\vec{x}_{t_0} \tag{8}$$

Por lo cual la solución particular del sistema para la cual $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_{t_0}$ es:

$$\boxed{\vec{x} = \Phi(\Phi(t_0))^{-1}\vec{x}_{t_0}} \tag{9}$$

1.2.2. Variación de parámetros

Considero una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema homogeneo:

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x} \tag{10}$$

Donde los coeficientes de la matriz A son funciones arbitrarias de t. Se desea resolver el sistema no homogeneo:

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \tag{11}$$

Para ello, busco soluciones particulares a la ecuación diferencial de la forma:

$$\vec{x}_p = \Phi(t)\vec{u}(t) \tag{12}$$

Reemplazo en la ecuación diferencial con el fin de resolver $\vec{u}(t)$:

$$\Phi'(t)\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}\,'(t) = A(t)\Phi(t)\vec{u}(t) + b(t) \tag{13}$$

Como Φ es matriz fundamental $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ y obtengo:

$$\Phi(t)\vec{u}\,'(t) = b(t) \tag{14}$$

Como las columnas de Φ son LI por definición de matriz fundamental, existe la inversa $\Phi^{-1}(t)$. Multiplicando por la derecha a ambos lados por $\Phi^{-1}(t)$ queda:

$$\vec{u}\,'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t) \tag{15}$$
$$\vec{u}(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}\,t + \vec{c} \tag{16}$$

Donde $\vec{c}$ es un vector de constantes arbitrario. La solución particular queda:

$$\vec{x}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}\,t + \Phi(t)\vec{c} \tag{17}$$

Para aplicar condiciones iniciales de la forma $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_{t_0}$, resulta conveniente usar como límites de integración t_0 y t de modo que la solución es:

$$\vec{x}_p = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}\,t + \Phi(t)\vec{c} \tag{18}$$

Evaluando en $t = t_0$ obtengo:

$$\vec{x}_{t_0} = \Phi(t_0)\vec{c} \tag{19}$$
$$\vec{c} = \Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_{t_0} \tag{20}$$

Y la solución particular queda:

$$\boxed{\vec{x}_p = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}\,t + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_{t_0}} \tag{21}$$

1.3. Matriz exponencial

La matriz exponencial e^{At}, con A matriz de $n \times n$ y coeficientes constantes, se define como:

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \tag{22}$$

Derivando con respecto al tiempo obtengo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}[e^{At}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= A\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right) = Ae^{At} \end{aligned} \tag{23}$$

De modo que e^{At} es matriz fundamental del sistema homogeneo:

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x} \tag{24}$$

Ademas, como $e^{A\cdot 0} = I$, si busco una solución particular a esta ecuación con condiciones iniciales $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, la solución particular es simplemente:

$$\vec{x}_p = e^{At}\vec{x}_0 \tag{25}$$

Entre algunas de las propiedades importantes de la matriz exponencial, se tiene que:

$$e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A} \tag{26}$$

De lo cual se tiene que:

$$e^{tA}e^{-tA} = I \tag{27}$$
$$\boxed{\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}} \tag{28}$$

Otras propiedades que se pueden obtener directamente de la definición en serie de potencias de la matriz exponencial son:

- $e^{A\cdot 0} = I$
- $e^{X}e^{-X} = I$
- $AB = BA \Rightarrow e^{A}e^{B} = e^{A+B}$
- Si Y es una matriz invertible entonces:
$$e^{YXY^{-1}} = YE^{X}Y^{-1}$$
- $\det(e^{X}) = e^{\mathrm{tr}(X)}$, Donde $\mathrm{tr}(X)$ denota la traza de X.
- $e^{X^T} = (e^{X})^T$.

2. Problemas

2.1.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} x$$

2.2.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

2.3.

Resuelva el siguiente sistema no homogeneo (copiado descaradamente de wikipedia):

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sabiendo que:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - 2te^{2t} & -2te^{2t} & 0 \\ -2e^t + 2(t+1)e^{2t} & 2(t+1)e^{2t} & 0 \\ 2te^{2t} & 2te^{2t} & 2e^t \end{pmatrix}$$

2.4.

Obtenga la solución particular del sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} x \tag{29}$$

Que satisfaga las condiciones iniciales $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ y $x_3(0) = c$.

3. Soluciones

3.1.

Primero obtengo los valores propios de la matriz resolviendo el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 & -8 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \tag{31}$$

$$(\lambda - 2)^3 = 0 \tag{32}$$

$$\boxed{\lambda = 2} \tag{33}$$

De modo que solo tengo un valor propio con multiplicidad algebráica igual a 2. Resuelvo los vectores propios de este valor propio escalonando la matriz:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} F_1 \to 3F_1 \\ F_2 \to 15F_2 \\ F_3 \to 5F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -9 & -24 \\ 15 & 0 & 15 \\ 15 & 10 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -9 & -24 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \qquad F_3 \to 9F_3 + F_2$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -9 & -24 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$$

Tomando $c = 1$ obtengo solo un vector propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \tag{34}$$

Con lo cual no se puede diagonalizar la matriz. Busco entonces otros dos vectores propios generalizados (que deben formar un conjunto LI junto a v_1), solución de:

$$(A - 2I)^3\vec{v} = 0 \tag{35}$$

Desarrollo entonces las potencias de la matriz necesarias:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^3 = 0 \tag{36}$$

De modo que basta tomar como soluciones a (34) los vectores:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{37}$$

Y sus soluciones asociadas quedan dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) =& e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \\ \vec{x}_2(t) =& e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}3e^{3t}\\e^{3t}\\2e^{3t}\end{pmatrix} \\ \vec{x}_3(t) =& e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right] \end{aligned} \tag{38}$$

3.2.

Resuelvo los valores propios de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

$$-(\lambda-3)^3 = 0 \tag{40}$$

$$\lambda = 3 \tag{41}$$

La matriz tiene solo un valor propio con multiplicidad algebraica $m = 3$. Resuelvo ahora los vectores propios asociados a λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} F_1 \to 3F_1 \\ F_2 \to 6F_2 \\ F_3 \to 2F_3 \end{matrix} \tag{42}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{matrix} \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad F_3 \to 3F_3 - F_2 \tag{44}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{45}$$

De lo cual se ve que solo se obtiene un vector propio. Tomando $c = 1$ obtengo:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Procedo a obtener los vectores propios generalizados, para ello resulevo primero:

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A-3I)^3 = 0 \tag{47}$$

De modo que tengo que buscar 3 soluciones LI a:

$$(A-3I)^3\vec{v} = 0 \tag{48}$$

Tengo de forma inmediata que $\vec{v}_1$ es solución. Como necesito otras dos soluciones tal que $\vec{v}_1$ y estas otras dos soluciones formen un conjunto LI, basta tomar:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Las soluciones asociadas a los vectores se resuelven usando (3) con lo cual se obtien las tres soluciones LI:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) =& e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_2(t) =& e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \\ \vec{x}_3(t) =& e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned} \tag{50}$$

Y la solución general se obtiene como cualquier combinación lineal de estas:

$$\vec{x}_g = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t) \tag{51}$$

3.3.

Utilizando variación de parámetros, tengo que la solución general está dada por:

$$\vec{x}_p = e^{At}\int_0^t e^{A(-t)}b(t)\,\mathrm{d}\,t + e^{At}\vec{x}(0) \tag{52}$$

Resuelvo:

$$e^{At}\int_0^t e^{A(-t)}b(t)\,\mathrm{d}\,t + e^{At}\vec{x}(0) \tag{53}$$

y me da lata escribir el desarrollo entero aca...Pero la gracia de ocupar variación de parámetros cuando se tiene la matriz exponencial, es que sacar su inversa es muy facil.

3.4.

El problema se puede resolver utilizando el método de valores y vectores propios. Sin embargo, en este caso, calculare e^{At} (donde A es la matriz del sistema), para determinar una matriz del fundamental, de la cual resulta trivial obtener la solución particular. Para calcular la exponencial, noto un detalle bastante peculiar de la matriz:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Por lo cual, calcular la matriz exponencial resulta bastante simple:

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \tag{56}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} \tag{57}$$

$$\boxed{e^{At} = \begin{pmatrix} 1 - t + t^2/2 & -t + t^2 & t^2/2 \\ -t^2/2 & 1 - t - t^2 & -t - t^2/2 \\ t + t^2/2 & 3t + t^2 & 1 + 2t + t^2/2 \end{pmatrix}} \tag{58}$$

La matriz exponencial obtenida es una matriz fundamental del sistema. Para obtener una solución particular que satisface la condición $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ de una matriz fundamental Φ, se tiene:[1]

$$\vec{x}_p = \Phi(\Phi(0))^{-1}\vec{x}_0 \tag{59}$$

Como $e^{A\cdot 0} = I$, se tiene:

$$\vec{x}_p = e^{At}\vec{x}_0 \tag{60}$$

Con lo cual se resuelve la solución particular pedida de forma inmediata.

$$\boxed{\vec{x}_p = \begin{pmatrix} a(1 - t + t^2/2) + b(t^2 - t) + ct^2/2 \\ -at^2/2 + b(1 - t - t^2) - c\left(t + t^2/2\right) \\ a\left(t + t^2/2\right) + b(3t + t^2) + c + 2ct + ct^2/2 \end{pmatrix}} \tag{61}$$

[1] $(\Phi(0))^{-1}$ significa la matriz inversa a la matriz Φ evaluada en $t = 0$

Ayudantia 7

Pablo Marchant Campos

Lunes 28 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Transformada de Laplace, Transformada Inversa

Considero una función $f(t)$ definida para todos los reales $t \geq 0$. Su transformada de Laplace, denotada por $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ se define como:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}\, t = F(s) \tag{1}$$

Claramente, por la linealidad de la operación de integración, la transformada de Laplace es lineal:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) = F(s),\ \mathcal{L}(g(t)) = G(s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(af(t) + bg(t)) =& aF(s) + bG(s), \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

Dada la transformada $F(s)$, la operación mediante la cual se recupera la función $f(t)$ se llama la transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \tag{3}$$

Al igual que $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t),\ \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) =& af(t) + bg(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4}$$

1.2. Transformada de la derivada

La transformada de Laplace es util para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes ya que permite transformar una ecuación diferencial para una variable $x(t)$, en una ecuación algebráica para su transformada $\mathcal{L}(x(t))$[1].

Esto se debe a que la transformada de Laplace de la derivada de una función se puede expresar en términos de la transformada de Laplace de la función:[2]

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) \, \mathrm{d}\, t \tag{5}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}\, t \tag{6}$$

Lo cual se reduce a:

$$\boxed{\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)} \tag{7}$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula, se puede demostrar que la transformada de la enésima derivada está dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}] =& s^{(n)} \mathcal{L}(f) \\ & - [f^{(n-1)}(0) + sf^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1} y(0)] \end{aligned}} \tag{8}$$

1.3. Convolución

La convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\, \tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\, \tau \tag{9}$$

La utilidad de la convolución para resolver transformadas inversas de Laplace esta en que, si tengo:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t) \tag{10}$$

Entonces, la transformada inversa del producto $F(s)G(s)$ está dada por:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t)} \tag{11}$$

[1] La transformada de Laplace también se puede aplicar a sistemas, en cuyo caso se obtiene una ecuación algebraica para la transformada de Laplace de cada una de las variables dependientes

[2] Para este desarrollo, supongo que $f(t)$ es tal que:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) e^{-st} = 0, \quad s > 0$$

1.4. Transformadas Comunes

A continuación se presenta una tabla con transformadas de Laplace que aparecen comunmente.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
C	$\frac{k}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0,\ n = 1, 2, \dots$
t^q	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}, \quad s > 0,\ q \in \mathbb{R}$
e^{at}	$\frac{1}{(s-a)}, \quad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > 0,\ n = 1, 2, \dots$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

1.5. Propiedades Importantes

Algunas de las propiedades mas importantes de la transformada de Laplace se listan a continuación. Para todas ellas se tiene $F(s)$ y $G(s)$ como las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, y a, b constantes reales:

$h(t)$	$H(s) = \mathcal{L}(h(t))$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f^{(n)}$	$s^n F - [f^{(n-1)}(0) + \cdots + s^{n-1} f(0)]$
$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$
$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(at)$	$\frac{F(s/a)}{\lvert a \rvert}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$

2. Problemas

2.1.

Encuentre la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{R}^+$$

2.2.

Resuelva con la transformada de Laplace la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + y = te^{2t}$$

Sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

2.3.

Ocupando la transformada de Laplace, encuentre la solución particular de:

$$y'' - y' - 2y = e^{3t}\cos(t)$$

Que satisface las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

2.4.

Resuelva el PVI:

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t \leq 4\pi \\ 0 & 4\pi < t \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

2.5.

Ocupando la transformada de Laplace, resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Que satisface las condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

3. Soluciones

3.1.

La transformada esta dada por la integral:

$$F(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} \, \mathrm{d}\, t \tag{12}$$

Con el cambio de variable $st = u, s \, \mathrm{d}\, t = \mathrm{d}\, u$ la integral se puede escribir como:

$$F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} \, \mathrm{d}\, u \tag{13}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^{(n+1)-1} e^{-u} \, \mathrm{d}\, u \tag{14}$$

La integral es una función especial llamada $\Gamma(n+1)$. Esta función esta definida como:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} \, \mathrm{d}\, u \tag{15}$$

La función $\Gamma(n)$ para el caso de $n \in \mathbb{N}$, satisface:

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \tag{16}$$

Para demostrar esto, se calcula primero $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} \, \mathrm{d}\, u = 1 \tag{17}$$

Luego, usando integración por partes, obtengo una relación entre $\Gamma(n+1)$ y $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u} \, \mathrm{d}\, u \tag{18}$$

$$\Gamma(n+1) = \left(-u^n e^{-u}\right) |_0^\infty + n \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} \, \mathrm{d}\, u \tag{19}$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)} \tag{20}$$

Y como $\Gamma(1) = 1$, la relación (16) es válida.

Entonces, para $n \in \mathbb{R}^+$, se tiene[3]:

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}} \tag{21}$$

Y para el caso particular de $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}} \tag{22}$$

3.2.

Parto aplicando la transformada de laplace a la ecuación:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(y) - (y'(0) + sy(0)) + 2s\mathcal{L}(y) - 2y(0) \\ + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-2)^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Aplicando las condiciones iniciales obtengo:

$$s^2\mathcal{L}(y) - s + 2s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) - 2 = \frac{1}{(s-2)^2} \tag{24}$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2 + 2s + 1) = \frac{1}{(s-2)^2} + s + 2 \tag{25}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s^2+2s+1)(s-2)^2} + \frac{s+2}{(s^2+2s+1)} \tag{26}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2} + \frac{s+2}{(s+1)^2} \tag{27}$$

Lo cual se puede escribir como:

$$\mathcal{L}(y) = F_1(s) + F_2(s) \tag{28}$$

Con:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2} \\ F_2(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2} \end{aligned} \tag{29}$$

[3] Por simplicidad, considero el resultado para $n \in \mathbb{R}^+$ ya que la función $\Gamma(a)$ se indefine para $a = 0, -1, -2, \ldots$. Sin embargo, el resultado que se obtiene también es válido para $n = 0$, y para valores negativos no enteros

Procedo a resolver las transformadas inversas para cada una de estas funciones, $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La solución para $y(t)$ será entonces simplemente la suma de estas dos funciones.

$F_1(s)$**:** Expando en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{s-2} + \frac{d}{(s-2)^2} \tag{30}$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2} = \frac{a(s+1)(s-2)^2}{(s+1)^2(s-2)^2} + \frac{b(s-2)^2}{(s+1)^2(s-2)^2} + \frac{c(s+1)^2(s-2)}{(s+1)^2(s-2)^2} + \frac{d(s+1)^2}{(s+1)^2(s-2)^2} \tag{31}$$

Igualando los numeradores, obtengo una ecuación para los coeficientes que se debe cumplir para todo s:

$$1 = a(s+1)(s-2)^2 + b(s-2)^2 + c(s+1)^2(s-2) + d(s+1)^2 \tag{32}$$

Eligo entonces s de modo que resulte sencillo resolver los coeficientes.

- $s = 2$:

$$1 = 9d, \quad d = \frac{1}{9} \tag{33}$$

- $s = -1$:

$$1 = 9b, \quad b = \frac{1}{9} \tag{34}$$

Con esto, he resuelto d y b, pero aun no tengo los valores de a y c, sino que solo la ecuación:

$$1 = a(s+1)(s-2)^2 + \frac{1}{9}(s-2)^2 + c(s+1)^2(s-2) + \frac{1}{9}(s+1)^2 \tag{35}$$

Tomo dos valores distintos de s con lo cual obtendre un sistema para a y c. Con $s = 1$ y $s = 0$ queda:

$$\begin{aligned} 1 =& 2a + \frac{1}{9} + -4c + \frac{4}{9} \\ 1 =& 4a + \frac{4}{9} - 2c + \frac{1}{9} \end{aligned} \tag{36}$$

Cuya solución es:

$$a = \frac{2}{27}, \quad c = -\frac{2}{27} \tag{37}$$

Se tiene entonces que:

$$F_1(s) = \frac{2/27}{s+1} + \frac{1/9}{(s+1)^2} - \frac{2/27}{s-2} + \frac{1/9}{(s-2)^2} \tag{38}$$

De lo cual resuelvo inmediatamente la inversa:

$$\boxed{f_1(t) = \frac{2}{27}e^{-t} + \frac{1}{9}te^{-t} - \frac{2}{27}e^{2t} + \frac{1}{9}te^{2t}} \tag{39}$$

$F_2(s)$**:** Tengo al expandir en fracciones parciales:

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2} \tag{40}$$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{a(s+1)+b}{(s+1)^2} \tag{41}$$

Igualando los numeradores queda:

$$s+2 = a(s+1) + b \tag{42}$$

$$s+2 = as + a + b \tag{43}$$

De lo cual tengo el sistema:

$$\begin{aligned} 1 =& a \\ 2 =& (a+b) \end{aligned} \tag{44}$$

$$a = 1, \quad b = 1 \tag{45}$$

Por lo cual:

$$F_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \tag{46}$$

De lo cual obtengo inmediatamente la inversa:

$$\boxed{f_2(t) = e^{-t} + te^{-t}} \tag{47}$$

Por lo tanto, tengo que $y(t)$ esta dado por:

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) \tag{48}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{29}{27}e^{-t} + \frac{10}{9}te^{-t} - \frac{2}{27}e^{2t} + \frac{1}{9}te^{2t}} \tag{49}$$

3.3.

Aplico la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}(y''-y'-2y)=\mathcal{L}(e^{3t}\cos(t)) \tag{50}$$
$$\mathcal{L}(y'')-\mathcal{L}(y')-2\mathcal{L}(y)=\frac{s-3}{(s-3)^2+1} \tag{51}$$

Desarrollo ahora el lado izquierdo de la expresión:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(y)-(y'(0)+sy(0)) \\ -s\mathcal{L}(y)+y(0)-2\mathcal{L}(y)=\frac{s-3}{(s-3)^2+1} \end{aligned} \tag{52}$$
$$\mathcal{L}(y)(s^2-s-2)-s+2=\frac{s-3}{(s-3)^2+1} \tag{53}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\mathcal{L}(y)(s-2)(s+1)-(s-2)=\frac{s-3}{(s-3)^2+1} \tag{54}$$
$$\mathcal{L}(y)=\frac{s-3}{(s-2)(s+1)((s-3)^2+1)}+\frac{1}{s+1} \tag{55}$$

Ahora obtengo la transformada inversa de $\mathcal{L}(y)$. Para el segundo término es trivial, pero para el primero, considero una expansión en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{s-3}{(s-2)(s+1)((s-3)^2+1)}= \\ \frac{as+b}{(s-3)^2+1}+\frac{c}{(s+1)}+\frac{d}{(s-2)} \end{aligned} \tag{56}$$

Para resolver a,b,c y d, desarrollo el lado derecho de la expresión con lo que obtengo:

$$\begin{aligned} \frac{s-3}{(s-2)(s+1)((s-3)^2+1)}= \\ \frac{(as+b)(s-2)(s+1)+c(s-2)((s-3)^2+1)}{(s-2)(s+1)((s-3)^2+1)}+ \\ \frac{d(s+1)((s-3)^2+1)}{(s-2)(s+1)((s-3)^2+1)} \end{aligned} \tag{57}$$

Igualando los numeradores, obtengo una ecuación que debe ser válida para todo s:

$$\begin{aligned} s-3=&(as+b)(s-2)(s+1)+ \\ &c(s-2)((s-3)^2+1)+d(s+1)((s-3)^2+1) \end{aligned} \tag{58}$$

Eligo entonces s de modo que resulte sencillo resolver los coeficientes.

- $s=-1$:

$$-4=c\cdot(-3)\cdot(17),\quad c=\frac{4}{51} \tag{59}$$

- $s=2$:

$$-1=d\cdot(3)\cdot(2),\quad d=-\frac{1}{6} \tag{60}$$

- $s=3+i$:

$$i=\quad (a(3+i)+b)(1+i)(4+i) \tag{61}$$
$$i=\quad (3a+ia+b)(3+5i) \tag{62}$$
$$i=\quad 9a+15ia+3ia-5a+3b+5ib \tag{63}$$
$$i=\quad (4a+3b)+i(18a+5b) \tag{64}$$

Igualando parte real e imaginaria obtengo un sistema para a y b:

$$\begin{aligned} 0=&4a+3b \\ 1=&18a+5b \end{aligned} \tag{65}$$
$$a=\frac{3}{34},\quad b=-\frac{2}{17} \tag{66}$$

Así, (55) queda como:

$$\mathcal{L}(y)=\frac{3s/34-2/17}{(s-3)^2+1}+\frac{4/51}{s+1}-\frac{1/6}{s-2}+\frac{1}{s+1} \tag{67}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(y)=\frac{(3/34)(s-3)+(5/34)}{(s-3)^2+1} \\ +\frac{(55/51)}{(s+1)}-\frac{(1/6)}{(s-2)} \end{aligned}} \tag{68}$$

De lo cual se puede calcular de forma inmediata la transformada inversa:

$$\boxed{y=e^{3t}\left(\frac{3}{34}\cos(t)+\frac{5}{34}\sin(t)\right)+\frac{55}{51}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{2t}} \tag{69}$$

3.4.

Utilizando la función escalón de Heaviside $u(t)$, la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$y''+3y'+2y=\cos(2t)-\cos(2t)u(t-4\pi) \tag{70}$$

Aplico transformada de Laplace junto con condiciones iniciales,obteniendo:

$$\mathcal{L}(y)[s^2+3s+2]=\frac{s}{s^2+4}-\mathcal{L}\left(\cos(2t)u(t-4\pi)\right) \tag{71}$$
$$\mathcal{L}(y)=\frac{s}{(s^2+4)(s+2)(s+1)}-\frac{\mathcal{L}\left(\cos(2t)u(t-4\pi)\right)}{(s+2)(s+1)} \tag{72}$$

Que se puede escribir como:

$$\mathcal{L}(y) = F_1(s) - \mathcal{L}\left(f_3(t)\right) F_2(s) \tag{73}$$

Donde defino:

$$\begin{aligned} F_1(s) =& \frac{s}{(s^2+4)(s+2)(s+1)} \\ F_2(s) =& \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ f_3(t) =& \cos(2t)u(t-4\pi) \end{aligned} \tag{74}$$

Procedo a obtener las inversas de F_1 y F_2 mediante expansión en fracciones parciales:

$F_1(s)$:

$$\begin{gathered} \frac{s}{(s^2+4)(s+2)(s+1)} = \\ \frac{as+b}{s^2+4} + \frac{c}{(s+2)} + \frac{d}{(s+1)} \end{gathered} \tag{75}$$

Para resolver a, b, c y d, desarrollo el lado derecho de la expresión con lo que obtengo:

$$\begin{gathered} \frac{s}{(s^2+4)(s+2)(s+1)} = \\ \frac{(as+b)(s+2)(s+1)+c(s+1)(s^2+4)}{(s^2+4)(s+2)(s+1)} + \\ \frac{d(s+2)(s^2+4)}{(s^2+4)(s+2)(s+1)} \end{gathered} \tag{76}$$

Igualando los numeradores, obtengo una ecuación que debe ser válida para todo s:

$$\begin{aligned} s =& (as+b)(s+2)(s+1)+ \\ & c(s+1)(s^2+4) + d(s+2)(s^2+4) \end{aligned} \tag{77}$$

Eligo entonces s de modo que resulte sencillo resolver los coeficientes.

- $s = -1$:

$$-1 = d \cdot (1) \cdot (5), \quad d = -\frac{1}{5} \tag{78}$$

- $s = -2$:

$$-2 = c \cdot (-1) \cdot (8), \quad c = \frac{1}{4} \tag{79}$$

- $s = 2i$:

$$2i = (2ia+b)(2i+2)(2i+1) \tag{80}$$
$$2i = (2ia+b)(-2+6i) \tag{81}$$
$$2i = -4ia - 12a - 2b + 6ib \tag{82}$$
$$2i = (-12a-2b) + i(-4a+6b) \tag{83}$$

Igualando parte real e imaginaria obtengo un sistema para a y b:

$$\begin{aligned} 0 =& -12a - 2b \\ 2 =& -4a + 6b \end{aligned} \tag{84}$$

$$a = -\frac{1}{20}, \quad b = \frac{3}{10} \tag{85}$$

De modo que:

$$F_1(s) = \frac{-s/20 + 3/10}{s^2+4} + \frac{1/4}{(s+2)} - \frac{1/5}{(s+1)} \tag{86}$$

$$F_1(s) = \frac{-s/20}{s^2+4} + \frac{2 \cdot 3/20}{s^2+4} + \frac{1/4}{(s+2)} - \frac{1/5}{(s+1)} \tag{87}$$

Y su inversa es:

$$\boxed{f_1(t) = -\frac{1}{20}\cos(2t) + \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-t}} \tag{88}$$

$F_2(s)$:

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{a}{(s+2)} + \frac{b}{(s+1)} \tag{89}$$

Para resolver a, b, c y d, desarrollo el lado derecho de la expresión con lo que obtengo:

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{a(s+1)+b(s+2)}{(s+2)(s+1)} \tag{90}$$

Igualando los numeradores, obtengo una ecuación que debe ser válida para todo s:

$$1 = a(s+1) + b(s+2) \tag{91}$$

Eligo entonces s de modo que resulte sencillo resolver los coeficientes.

- $s = -1$:

$$1 = b \tag{92}$$

- $s = -2$:

$$-1 = a \tag{93}$$

De modo que:

$$F_2(s) = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+1)} \tag{94}$$

Y su inversa es:

$$\boxed{f_2(t) = -e^{-2t} + e^{-t}} \tag{95}$$

Procedo ahora a invertir $\mathcal{L}(y)$:

$$\mathcal{L}(y) = F_1(s) - \mathcal{L}\left(f_3(t)\right) F_2(s) \tag{96}$$

$$\boxed{y(t) = f_1(t) - (f_3 * f_2)(t)} \tag{97}$$

Resuelvo la convolución de f_3 con f_2:

$$(f_3 * f_2)(t) = \int_0^t f_3(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \tag{98}$$

$$= \int_0^t \cos(2\tau) u(\tau - 4\pi)[e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\,\tau \tag{99}$$

$$\boxed{= \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 4\pi \\ \displaystyle\int_{4\pi}^t \cos[2\tau][e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\,\tau & 4\pi \leq t \end{cases}} \tag{100}$$

Una ves resuelta esta integral, se reemplaza el valor de la convolución en (97) con lo cual se obtiene la solución particular requerida.

3.5.

El sistema consiste de dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$x_1' = x_1 + 2x_2 + \cos(t) \tag{101}$$

$$x_2' = 2x_1 + x_2 + \sin(t) \tag{102}$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones. Para la primera tengo:

$$\mathcal{L}(x_1') = \mathcal{L}(x_1 + 2x_2 + \cos(t)) \tag{103}$$

$$-x_1(0) + s\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_1) + 2\mathcal{L}(x_2) + s/(s^2+1) \tag{104}$$

$$-\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(x_1)(1-s) + 2\mathcal{L}(x_2) \tag{105}$$

Procediendo de igual forma con la segunda ecuación obtengo:

$$\mathcal{L}(x_2') = \mathcal{L}(2x_1 + x_2 + \sin(t)) \tag{106}$$

$$-x_2(0) + s\mathcal{L}(x_2) = 2\mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2) + 1/(s^2+1) \tag{107}$$

$$-\frac{1}{s^2+1} = 2\mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2)(1-s) \tag{108}$$

Las ecuaciones (105) y (108) entregan un sistema algebraico para $\mathcal{L}(x_1)$ y $\mathcal{L}(x_2)$:

$$\begin{pmatrix} -s/(s^2+1) \\ -1/(s^2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-s) & 2 \\ 2 & (1-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x_1) \\ \mathcal{L}(x_2) \end{pmatrix} \tag{109}$$

Resuelvo para $\mathcal{L}(x_1)$:

$$\mathcal{L}(x_1) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -s/(s^2+1) & 2 \\ -1/(s^2+1) & (1-s) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} (1-s) & 2 \\ 2 & (1-s) \end{pmatrix}\right|} \tag{110}$$

$$\mathcal{L}(x_1) = \frac{-s(1-s)+2}{(s^2+1)((s-1)^2-4)} \tag{111}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(x_1) = \frac{s^2-s+2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}} \tag{112}$$

De igual modo para $\mathcal{L}(x_2)$ se obtiene:

$$\mathcal{L}(x_2) = \frac{\left|\begin{pmatrix} (1-s) & -s/(s^2+1) \\ 2 & -1/(s^2+1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} (1-s) & 2 \\ 2 & (1-s) \end{pmatrix}\right|} \tag{113}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(x_2) = \frac{3s-1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}} \tag{114}$$

El resto del problema consiste en obtener las transformadas inversas de estas funciones.

Parto resolviendo x_1.[4] Expandiendo en fracciones parciales, busco coeficientes a, b, c y d que satisfagan:

$$\frac{s^2-s+2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s-3} + \frac{d}{s+1} \tag{115}$$

[4] A partir de este punto, la función $X_i(s)$ correspondera a la transformada de laplace de $x_i(t)$, o sea, $X_i(s) = \mathcal{L}(x_i(t))$

Desarrollando el lado derecho se obtiene:

$$\frac{s^2-s+2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{(as+b)(s-3)(s+1)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} + \frac{c(s^2+1)(s+1)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} + \frac{d(s^2+1)(s-3)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} \tag{116}$$

Igualando los numeradores obtengo que las constantes deben cumplir:

$$\begin{aligned} s^2-s+2 =& (as+b)(s-3)(s+1) \\ &+ c(s^2+1)(s+1) + d(s^2+1)(s-3) \end{aligned} \tag{117}$$

Que es una ecuación que se debe cumplir para todo s. Elijo entonces valores particulares de s que me permitan resolver facilmente el sistema:

- $s = 3$:

$$8 = 40c, \quad c = \frac{1}{5} \tag{118}$$

- $s = -1$:

$$4 = -8d, \quad d = -\frac{1}{2} \tag{119}$$

- $s = i$:

$$1-i = (a+ib)(i-3)(i+1) \tag{120}$$
$$1-i = (2a-4b) - i(4a+2b) \tag{121}$$

Igualando parte real e imaginaria obtengo un sistema para a y b:

$$\begin{aligned} 1 =& 2a-4b \\ -1 =& -4a-2b \end{aligned} \tag{122}$$

$$a = \frac{3}{10}, \quad b = -\frac{1}{10} \tag{123}$$

Juntando esto tengo que:

$$\mathcal{L}(x_1) = \frac{3s/10-1/10}{s^2+1} + \frac{1/5}{s-3} - \frac{1/2}{s+1} \tag{124}$$

Por lo que se tiene:

$$\boxed{x_1 = \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t) + \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}} \tag{125}$$

Resuelvo ahora x_2. Expandiendo en fracciones parciales, busco coeficientes a, b, c y d que satisfagan:

$$\frac{3s-1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s-3} + \frac{d}{s+1} \tag{126}$$

Desarrollando el lado derecho se obtiene:

$$\frac{3s-1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{(as+b)(s-3)(s+1)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} + \frac{c(s^2+1)(s+1)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} + \frac{d(s^2+1)(s-3)}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} \tag{127}$$

Igualando los numeradores obtengo que las constantes deben cumplir:

$$\begin{aligned} 3s-1 =& (as+b)(s-3)(s+1) \\ &+ c(s^2+1)(s+1) + d(s^2+1)(s-3) \end{aligned} \tag{128}$$

Que es una ecuación que se debe cumplir para todo s. Elijo entonces valores particulares de s que me permitan resolver facilmente el sistema:

- $s = 3$:

$$8 = 40c, \quad c = \frac{1}{5} \tag{129}$$

- $s = -1$:

$$-4 = -8d, \quad d = \frac{1}{2} \tag{130}$$

- $s = i$:

$$3i-1 = (a+ib)(i-3)(i+1) \tag{131}$$
$$3i-1 = (2a-4b) - i(4a+2b) \tag{132}$$

Igualando parte real e imaginaria obtengo un sistema para a y b:

$$\begin{aligned} -1 =& 2a-4b \\ 3 =& -4a-2b \end{aligned} \tag{133}$$

$$a = -\frac{7}{10}, \quad b = -\frac{1}{10} \tag{134}$$

Juntando esto tengo que:

$$\mathcal{L}(x_2) = \frac{-7s/10-1/10}{s^2+1} + \frac{1/5}{s-3} + \frac{1/2}{s+1} \tag{135}$$

Por lo que se tiene:

$$\boxed{x_2 = -\frac{7}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t) + \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t}} \tag{136}$$

Ayudantia 8

Pablo Marchant Campos

Lunes 28 de Enero del 2008

1. Materia

1.1. Linealización

Para determinar cualitativamente el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= f(x,y) \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

Se determinan primero sus puntos de equilibrio. Estos son soluciones del sistema algebraico:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Considero luego la expansión en serie de potencias de $f(x,y)$ y $g(x,y)$ en torno a (x_0,y_0) mediante la cual la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x' =& f[x_0,y_0] + [x-x_0]f_x[x_0,y_0] + [y-y_0]f_y[x_0,y_0] + \dots \\ y' =& g[x_0,y_0] + [x-x_0]g_x[x_0,y_0] + [y-y_0]g_y[x_0,y_0] + \dots \end{aligned}$$

Si omito términos de orden superior a 1, y utilizo el hecho de que (x_0,y_0) es punto de equilibrio obtengo:

$$\begin{aligned} x' =& (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) \\ y' =& (x-x_0)g_x(x_0,y_0) + (y-y_0)g_y(x_0,y_0) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} (x-x_0)' \\ (y-y_0)' \end{pmatrix} = J(f,g)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Donde la matriz Jacobiana esta dada por:

$$J(f,g)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Utilizando como origen el punto (x_0,y_0) la linealización queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

Para linealizaciones que conduzcan a sistemas diagonalizables, se tendrán 2 valores propios λ_1, λ_2, y dos vectores propios v_1 y v_2, y la solución en torno al punto de equilibrio será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

Que representará el comportamiento del sistema si se satisfacen las condiciones establecidas por el teorema de Hartman Grobman (i.e. f y g diferenciables en (x_0,y_0), y que la matriz Jacobiana evaluada en (x_0,y_0) no tenga valores propios ulos o imaginarios puros).

El comportamiento asintótico de las soluciones se determina estudiando la parte real de los valores propios. Estudio primero soluciones para las cuales $c_2 = 0$[1]. Tengo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} \tag{8}$$

Si la parte real de λ_1 es negativa, las soluciones tenderán al origen cuando t tiende a infinito. Como el sistema esta centrado en (x_0,y_0), esto quiere decir que las soluciones en la dirección definida por v_1 son alejadas de (x_0,y_0). En cambio, si la parte real de λ_1 es positiva, las soluciones en la linea de v_1 se alejan de (x_0,y_0) cuando t tiende a infinito. Estas conclusiones se pueden realizar de igual forma para $c_1 = 0$.

Entonces:

- $Re(\lambda_1) > 0, Re(\lambda_2) > 0$: El punto actúa como un repulsor. Si los valores propios tienen parte imaginaria, entonces las trayectoria tienen forma de espiral.
- $Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_2) < 0$: El punto es un atractor. Si los valores propios tienen parte imaginaria, entonces las trayectoria tienen forma de espiral.

[1] Esto corresponda a condiciones iniciales para x e y contenidas en v_1. Recordar que como el sistema contiene solo las primera derivadas de x e y, los valores iniciales de x e y son datos suficientes para determinar una solución particular del sistema

- $Re(\lambda_1) < 0 < Re(\lambda_2)$ o $Re(\lambda_1) > 0 > Re(\lambda_2)$: El punto es un punto de equilibrio inestable que se comporta como un respulsor en la dirección del vector propio cuyo valor propio tiene parte real es positiva, y como un atractor en la dirección del vector propio cuyo valor propio tiene parte real negativa.

En resumen, si $\lambda_1 = a_1 + bi$ y $\lambda_2 = a_2 - bi$, La siguiente tabla describe el comportamiento en torno al punto de equilibrio:

a_1	a_2	b	Tipo
>0	>0	$b=0$	Repulsor no espiral
>0	>0	$b\neq 0$	Repulsor espiral
<0	<0	$b=0$	Atractor no espiral
<0	<0	$b\neq 0$	Atractor espiral
>0	<0	$b\neq 0$	Punto silla
$=0$	$=0$		Sin conclusiones

Tambien se pueden clasificar los puntos de equilibrio según su estabilidad:

- **Estable:** Un punto de equilibrio se llama estable si es que los valores propios del sistema linealizado en torno a ese punto tienen todos parte real negativa.
- **Inestable:** Un punto de equilibrio se llama inestable si al menos uno de los valores propios del sistema linealizado en torno a ese punto tiene parte real positiva.

1.1.1. Competencia

Para modelar la competencia entre dos especies se utiliza el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y)\\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= x(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x)\end{aligned} \tag{9}$$

Donde x e y representan el numero de individuos de cada especie, y las constantes ϵ, σ y α dependen de cada especie y de la interacción mutua entre estas.

Para resolver estos problemas se buscan puntos de equilibrio del sistema, lo cual corresponde a resolver:

$$\begin{aligned}f(x,y) = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) = 0\\ g(x,y) = x(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) = 0\end{aligned} \tag{10}$$

Este sistema tiene cuatro puntos de equilibrio. El mas evidente de ellos esta dado por $(x,y) = (0,0)$. Para otro de los puntos de equilibrio, tomo $y = 0$, y resuelvo $(\epsilon_1 - \sigma_1 x) = 0$ para x. De igual forma, puedo tomar $x = 0$ y resolver $(\epsilon_2 - \sigma_2 y) = 0$. Para el último punto, resulevo:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0\\ \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0\end{aligned} \tag{11}$$

$$x = \frac{\sigma_2\epsilon_1 - \alpha_1\epsilon_2}{\sigma_2\sigma_1 - \alpha_2\alpha_1}, \quad y = \frac{\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2} \tag{12}$$

La naturaleza de estos puntos se determina resolviendo el sistema lineal que aproxima el comportamiento del sistema no-lineal en un punto de equilibrio (x_0, y_0):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J(f,g)(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{13}$$

Donde la matriz jacobiana esta dada por:

$$J(f,g) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 x_0 - \alpha_1 y_0 & -x_0\alpha_1 \\ -y_0\alpha_2 & \epsilon_2 - 2\sigma_2 y_0 - \alpha_2 x_0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Si se satisfacen las condiciones establecidas por el teorema de Hartman Grobman, este sistema representara entonces el comportamiento del sistema no lineal en la proximidad del punto de equilibrio.

1.1.2. Presa-Depredador

Para modelar la interacción entre el número de presas x y el número de depredadores y para los cuales existe una tasa constante de crecimiento a de la población de presas y una tasa constante de reducción de la población de predadores c, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= x(a - \alpha y)\\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= y(-c + \gamma x)\end{aligned} \tag{15}$$

Donde α y γ representan la interacción entre las especies. Este sistema tiene dos puntos de equilibrio, el mas evidente es $(x,y) = (0,0)$. El otro se obtiene solucionando:

$$\begin{aligned}a - \alpha y = 0\\ -c + \gamma x = 0\end{aligned} \tag{16}$$

$$y = \frac{a}{\alpha}, \quad x = \frac{c}{\gamma} \tag{17}$$

Y el comportamiento en torno a los puntos de equilibrio se estudia resolviendo la linealización del sistema en torno a cada punto de equilibrio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \alpha y_0 & -x_0\alpha \\ y_0\gamma & -c + \gamma x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

Para el punto $(0, 0)$ se tiene la linealización:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{19}$$

La solución de este sistema esta dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct} \tag{20}$$

Por lo cual la solución en torno a $(0, 0)$ es un punto silla que actua como atractor a lo largo del eje y, y como un repulsor a lo largo del eje x.

Para la linealización en torno al otro punto de equilibrio se tiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{21}$$

Los valores propios de esta matriz son imaginarios, por lo cual el comportamiento del sistema linealizado no es necesariamente similar al del no-lineal en la proximidad al punto de equilibrio.

De todos modos, para estudiar la forma de las trayectorias del sistema linealizado en torno al punto de equilibrio, tengo:

$$\begin{aligned} x' &= -\alpha c y/\gamma \\ y' &= \gamma a x/\alpha \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{(\gamma a/\alpha)x}{(\alpha c/\gamma)y} \tag{23}$$

La solución a esta ecuación es:

$$\gamma^2 a x^2 + \alpha^2 c v^2 = C \tag{24}$$

Que representa elipses en torno al punto de equilibrio.

Ahora, si se considera el sistema no lineal se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)} \tag{25}$$

Esta es una ecuación separable cuya solución es:

$$a - \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C \tag{26}$$

Se puede demostrar que estas soluciones representan curvas cerradas que encierran el punto crítico, por lo cual para este caso, el sistema no-lineal se comporta de forma similar al linealizado, a pesar de que se tienen valores propios imaginarios.

1.2. Funciones de Liapunov

A continuación describo el método de las funciones de Liapunov para clasificar puntos de equilibrio de un sistema de 2 ecuaciones diferenciales (La extensión a sistemas mas grandes sigue de forma lógica).

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio para un sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= f(x, y) \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{27}$$

Desplazando el origen al punto de equilibrio queda:[2]

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= f(x + x_0, y + y_0) \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= g(x + x_0, y + y_0) \end{aligned} \tag{28}$$

Que es una ecuación diferencial con un punto de equilibrio en $(0, 0)$. Para estudiar su estabilidad, considero los siguientes teoremas:

Estabilidad de Sistemas Autónomos: Sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva definida en una vecindad del orígen. Considero $\mathrm{d}\,V(x, y)/\mathrm{d}\,t = \dot{V}(x, y)$ dado por:

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x + x_0, y + y_0) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x + x_0, y + y_0)$$

- Si $\dot{V}(x, y)$ es **negativa definida** en una vecindad del origen, entonces el origen es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**, es decir, toda trayectoria converge al origen si $t \to \infty$.
- Si $\dot{V}(x, y)$ es **seminegativa definida** en una vecindad del origen, entonces el origen es un punto de equilibrio **estable**, Es decir, en cierta vecindad del origen todas las trayectorias convergen al origen.

Inestabilidad de Sistemas Autónomos: Sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $V(0, 0) = 0$, y que tenga un punto (a, b) tal que $V(a, b) > 0$

- Si $\dot{V}(x, y)$ es **positiva definida** en una vecindad del origen, entonces el origen es un punto de equilibrio **inestable**.

[2] Aqui realizo el cambio de variable:

$$x_2 = x - x_0, \quad y_2 = y - y_0$$

Sin embargo, para simplificar la notación utilizo x e y para denotar tambien estas nuevas variables.

1.3. Series de Potencias

Normalmente se pueden obtener buenas aproximaciones a las soluciones de una ecuación diferencial usando series de potencias.Por ejemplo, si tengo el PVI:

$$f(y'', y', t) = Q(t), \quad y(t_0) = a, \; y'(t_0) = b \tag{29}$$

Supongo que y y $Q(t)$ tienen una expansión en serie de potencias en torno al punto $t = t_0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ Q(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n \end{aligned} \tag{30}$$

Donde los b_n quedan determinados por la función $Q(t)$, y los a_n se deben resolver para obtener la solución $y(t)$. Resuelvo y' e y'':

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \tag{31}$$

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2} \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

Que tambien pueden ser escritas como:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (t - t_0)^n \tag{34}$$

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (t - t_0)^n \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

Si se sustituyen estas expresiones en (29) y se igualan coeficientes de series de potencias de t, entonces es posible resolver relaciones de recurrencia para los coeficientes a_n.

Para resolver finalmente los valores numéricos de los a_n, se utilizan las condiciones iniciales. Utilizando la expresión en serie de potencias de $y(t)$, se obtendrá al aplicar condiciones iniciales que:

$$y(0) = a = a_0, \quad y'(0) = b = a_1 \tag{37}$$

Y el resto de los coeficientes se obtiene mediante las relaciones de recurrencia.

2. Problemas

2.1.

Estudie cualitativamente el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= x(1 - x - y) \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= y(0{,}75 - y - 0{,}5x) \end{aligned}$$

En el cual x e y representan la cantidad de individuos de dos especies que compiten por los mismos recursos.

2.2.

Estudie cualitativamente el comportamiento del sistema:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x(1 - x - y) \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \quad y(0{,}5 - 0{,}25y - 0{,}75x)$$

En el cual x e y representan la cantidad de individuos de dos especies que compiten por los mismos recursos.

2.3.

Estudie cualitativamente el comportamiento del sistema:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x(1 - 0{,}5y) \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \quad y(0{,}75 - 0{,}25x)$$

Para la cual x representa la cantidad presas, e y la cantidad de depredadores de estas presas.

2.4.

Usando una función de Liapunov apropiada demuestre que el punto de equilibrio ubicado en $(1, 2)$ de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} x' &= \quad -5x + 5 - xy^2 + 4xy + y^2 - 4y \\ y' &= \quad -2y + 4 - x^2 y + 2x^2 + 2xy - 4x \end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

2.5.

Usando una función de Liapunov apropiada, demuestre que el punto de equilibrio $(0.5, 0.5)$ de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= x(1 - x - y) \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= y(0{,}75 - y - 0{,}5x) \end{aligned}$$

(la misma del problema 1) es asintoticamente estable.

2.6.

Obtenga dos soluciones LI en forma de serie de potencias en torno a $t_0 = 0$ de la ecuación diferencial de Airy:

$$y'' - ty = 0$$

3. Soluciones

3.1.

Los puntos de equilibrio del sistema son $(0,0),(1,0),(0,0.75)$ y $(0.5,0.5)$. Procedo a estudiar la linealización del sistema en torno a estos puntos:

- $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{38}$$

  La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.75t} \tag{39}$$

  Por lo tanto, el punto actua como un repulsor en las direcciones de ambos ejes coordenados.

  En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son positivos, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- $(1,0)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{40}$$

  La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0.25t} \tag{41}$$

  Por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable que actua como atractor en la dirección definida por el eje x, y como un repulsor en la dirección definida por el vector $(4,-5)$.

  En cuanto a estabilidad, un valor propio del sistema linealizado es positivo, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- $(0,0.75)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{42}$$

  La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0.25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t} \tag{43}$$

  Por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable que actua como atractor en la dirección definida por el vector $(8,-3)$, y como un repulsor en la dirección definida por el eje y.

  En cuanto a estabilidad, uno de los valores propios del sistema linealizado es positivo, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- $(0.5,0.5)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{44}$$

  La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(2-\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(2+\sqrt{2})t} \tag{45}$$

  Ambas exponenciales son negativas, por lo cual se tiene un punto de equilibrio atractor.

  En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son negativos, por lo cual el punto de equilibrio es **estable**.

Juntando estos resultados, puedo esbozar el comportamiento del sistema no-lineal, que se muestra en el plano fase $x - y$ de la figura 1.

De la gráfica se observa que la cantidad de ambas poblaciones tiende a un número estable en el cual ambas conviven.

3.2.

Los puntos de equilibrio del sistema son $(0,0),(1,0),(0,2)$ y $(0.5,0.5)$. Procedo a estudiar la linealización del sistema en torno a estos puntos:

- $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{46}$$

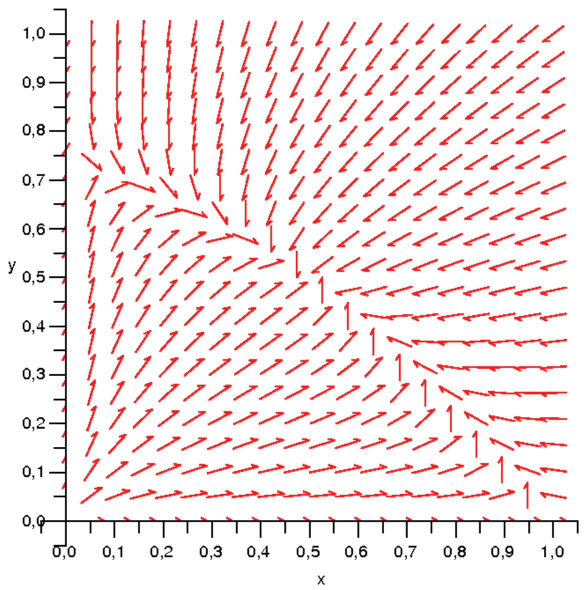


Figura 1: Diagrama de pendientes en el plano de fase $x-y$ para el sistema del problema 2.1

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.5t} \tag{47}$$

Por lo tanto, el punto actua como un repulsor en las direcciones de ambos ejes coordenados.

En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son positivos, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- $(1, 0)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{48}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-0.25t} \tag{49}$$

Por lo tanto, el punto actúa como un atractor en las direcciones definidas por los vectores $(1, 0)$ y $(4, -3)$

En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son negativos, por lo cual el punto de equilibrio es **estable**.

- $(0, 2)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{50}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5t} \tag{51}$$

Por lo tanto, el punto actúa como un atractor en las direcciones definidas por los vectores $(0, 1)$ y $(1, 3)$.

En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son negativos, por lo cual el punto de equilibrio es **estable**.

- $(0.5, 0.5)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.375 & -0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{52}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 &\begin{pmatrix} 1 \\ -(3+\sqrt{57}/8) \end{pmatrix} e^{-(5-\sqrt{57})t/16} \\ &+ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -(3-\sqrt{57}/8) \end{pmatrix} e^{-(5+\sqrt{57})t/16} \end{aligned} \tag{53}$$

Este resultado es, aproximadamente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \simeq c_1 &\begin{pmatrix} 1 \\ -1.32 \end{pmatrix} e^{0.16t} \\ &+ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.57 \end{pmatrix} e^{-0.79t} \end{aligned} \tag{54}$$

Por lo tanto, se tiene que en la dirección definida por $(1, -1.32)$ el punto actúa como un repulsor, pero en la dirección dada por $(1, 0.57)$, el punto actúa como un atractor.

En cuanto a estabilidad, uno de los valores propios del sistema linealizado es positivo, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

Juntando estos resultados, puedo esbozar el comportamiento del sistema no-lineal, que se muestra en el plano fase $x-y$ de la figura 2.

De la gráfica observo que ambas especies no pueden convivir ya que para distintas condiciones iniciales, todas las soluciones hacen tender una de las poblaciones a cero.

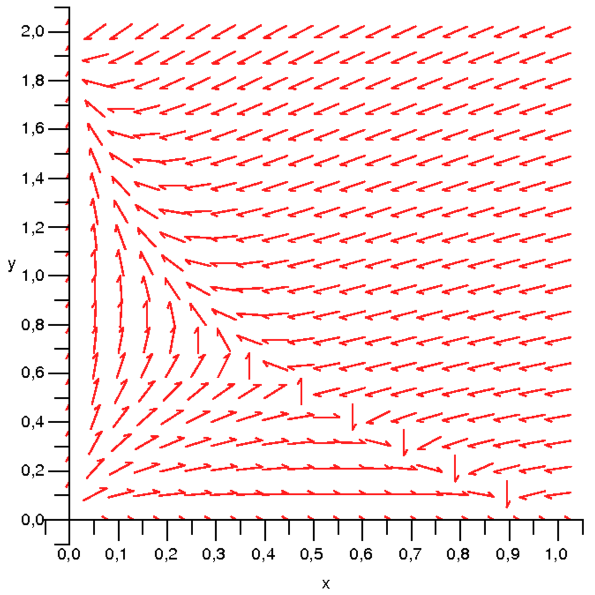


Figura 2: Diagrama de pendientes en el plano de fase $x - y$ para el sistema del problema 2.2

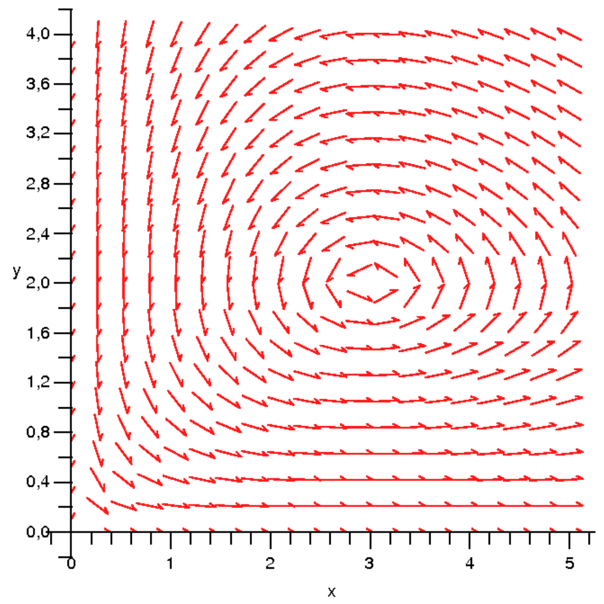


Figura 3: Diagrama de pendientes en el plano de fase $x - y$ para el sistema del problema 2.3

3.3.

Tengo que los puntos críticos del sistema están en $(0,0)$ y $(3,2)$. Según el análisis hecho en la sección previa sobre el modelo presa-depredador, se tiene que el sistema se comportara como un punto de equilibrio inestable en torno al origen, siendo atractor a lo largo del eje y,y repulsor a lo largo del eje x. Con esto se pueden esbozar las soluciones al sistema (ver figura a la derecha).

Juntando estos resultados, puedo esbozar el comportamiento del sistema no-lineal, que se muestra en el plano fase $x - y$ de la figura 3.

3.4.

Primero desplazo el origen de la ecuación diferencial al punto de equilibrio, realizando el reemplazo:

$$x \to x + 1, \quad y \to y + 2 \tag{55}$$

Con lo cual obtengo:

$$x' = \quad -x - xy^2 \tag{56}$$
$$y' = \quad -y - x^2 y \tag{57}$$

Pretendo construir una funcion de Liapunov de la forma:

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a > 0,\ 4ac - b^2 > 0 \tag{58}$$

Donde las condiciones fijadas sobre las constantes a, b y c son necesarias para que $V(x, y)$ sea positiva definida. Si el origen (recordar que $(1, 2)$ se desplazo al origen) es un punto equilibrio asintóticamente estable, entonces debe existir una función de Liapunov tal que $\dot{V}(x, y)$ sea negativa definida. Entonces busco coeficientes a, b y c tal que $V(x, y)$ cumpla con esto[3].

Calculo $\dot{(V)}(x, y)$:

$$\dot{V} = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2 y) \tag{59}$$

$$\dot{V} = -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)] \tag{60}$$

De aqui se ve que basta tomar $b = 0$ y a, c como cualquier par de constantes positivas para construir la función de Liapunov necesaria, con lo cual se demuestra que $(1, 2)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema.

[3]Hasta este punto, no existe nada que me afirme que hay una función de Liapunov de la forma indicada, pero de encontrarse coeficientes a, b y c tales que $a > 0,\ 4ac - b^2 > 0$ y $\dot{V}$ sea negativa definida, entonces se habrá demostrado lo pedido

3.5.

Primero desplazo el origen al punto de equilibrio con lo cual obtengo la ecuación diferencial:

$$x' = \quad -0.5x - 0.5y - x^2 - xy \tag{61}$$
$$y' = \quad -0.25x - 0.5y - 0.5xy - y^2 \tag{62}$$

Veo si $V = x^2 + y^2$ es una función de Liapunov apropiada que permita verificar que el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Calculo $\dot{V}$:

$$\dot{V} = -(x^2 + 1.5xy + y^2) - (2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3) \tag{63}$$

Donde separe los términos cuadráticos de los cúbicos. Noto que:

$$(x^2 + 1.5xy + y^2) = 0.25(x^2 + y^2) + 0.75(x + y)^2 \tag{64}$$

Por lo tanto, los términos cuadráticos en 63 dan un aporte negativo a $\dot{V}$, de modo que para que $\dot{V}$ sea negativa definida en una vecindad del origen, basta demostrar que la siguiente inecuación es válida en alguna vecindad del origen:

$$\begin{aligned} &|0.25(x^2 + y^2) + 0.75(x + y)^2| \\ &\qquad > |2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3| \end{aligned} \tag{65}$$

Para llegar a un resultado util, utilizo coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{66}$$

Desarrollando con esto el lado derecho de la inecuación (65) se obtiene:

$$\begin{aligned} &|2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3| \\ &= r^3|2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta + 2\sin^3\theta| \\ &\le r^3(2|\cos^3\theta| + 2|\cos^2\theta\sin\theta| + |\cos\theta\sin^2\theta| + 2|\sin^3\theta|) \\ &\le 7r^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que se cumpla (65), basta que se cumpla la inecuación mas restringida:

$$|0.25(x^2 + y^2)| \le 7r^3 \tag{67}$$
$$0.25r^2 \le 7r^3 \tag{68}$$

Esta inecuación es válida para $r < 1/28$, por lo tanto, al menos en un disco de radio $r = 1/28$ en torno al origen, se puede afirmar que $\dot{V}$ es negativa definida, y por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

3.6.

Considero la expansión en serie de potencias de y en torno a $t_0 = 0$ junto con su segunda derivada:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{69}$$
$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(t-t_0)^n \tag{70}$$
$$\tag{71}$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial obtengo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \tag{72}$$
$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \tag{73}$$
$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]t^n = 0 \tag{74}$$

Igualando coeficientes de la serie de potencias a cero obtengo el valor de $a_2 = 0$, junto con una relación de recurrencia para los coeficientes:

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}} \tag{75}$$

Utilizando la relación de recurrencia se puede ver inmediatamente que los términos de la forma a_{2+3n} son iguales a cero. Todos los otros términos se pueden resolver en términos de a_0 y a_1.

Para resolver los términos de la forma a_{3n} ocupo a_0:

$$a_3 = \frac{a_0}{(2)(3)}, \quad a_6 = \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)} \tag{76}$$

Lo cual sugiere la formula general:

$$\boxed{a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)!}\prod_{k=1}^{n}[3(k-1)+1]} \tag{77}$$

De igual manera para los términos de la forma a_{3n+1} los resuelvo en términos de a_1:

$$a_4 = \frac{a_1}{(3)(4)}, \quad a_6 = \frac{a_3}{(6)(7)} = \frac{a_0}{(3)(4)(6)(7)} \tag{78}$$

Lo cual sugiere la formula general:

$$\boxed{a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n+1)!}\prod_{k=1}^{n}[3(k-1)+2]} \tag{79}$$

Y la solución general a la ecuación diferencial se obtiene como:

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 t^{3n}}{(3n)!} \prod_{k=1}^{n} [3(k-1)+1] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 t^{3n+1}}{(3n+1)!} \prod_{k=1}^{n} [3(k-1)+2] \end{aligned} \tag{80}$$

Para obtener dos soluciones LI, elijo una tomando $a_0 = 1, a_1 = 0$ y la otra tomando $a_0 = 0, a_1 = 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!} \prod_{k=1}^{n} [3(k-1)+1] \\ y_2 =& x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!} \prod_{k=1}^{n} [3(k-1)+2] \end{aligned}} \tag{81}$$